Examen (23 mai 2019)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du vendredi 24 mai 2019 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définit inductivement par :

(B) $(0,0) \in D$,

(R) si $(n,m) \in D$ alors $(n+1, m+n+1) \in D$.

Monter que $D = \{(n, \frac{n*(n+1)}{2} | n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash ((\neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$
2. $\vdash B \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \vee ((\neg A) \Rightarrow B)]$
3. $\vdash [(A \Rightarrow B) \vee C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \vee C)]$
4. $\vdash [A \Rightarrow (B \vee C)] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \vee C]$ (difficile)
5. $\vdash [\neg(A \wedge B)] \Rightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$

Exercice 3 Logique du premier ordre : merci pour ce sujet

Afin de compenser la méconnaissance de certains d'entre vous du monde merveilleux des licornes, nous allons modéliser une version (fortement simplifiée) du (normalement) célèbre jeu NetHack.

Le monde de (notre version de) NetHack est composé d'humains, de licornes et d'elfes. Ces trois catégories sont mutuellement incompatibles. Le fait de manger permet de posséder certaines caractéristiques. Manger une licorne permet de posséder la téléportation. Manger est le seul moyen de posséder cette caractéristique. Enfin manger un personnage de sa race conduit à la mort. On ne peut bien entendu pas se manger soit même.
Question 1 : Donner une modélisation complète du monde de NetHack.
Question 2 : Montrer que tout humain mangeant une licorne possède la téléportation.
Question 3 : Montrer que tout personnage n'étant pas un elfe est soit une licorne soit un humain.
Question 4 : Montrer qu'un elfe n'est ni une licorne, ni un humain.
Question 5 : Montrer qu'une licorne ne peut pas être à la fois vivante et posséder la téléportation.
Question 6 : Montrer qu'un individu vivant possédant la téléportation n'est pas une licorne.
Question 7 : En supposant que les elfes ne mangent pas, montrer que seuls les humains peuvent posséder la téléportation en étant vivants.

Exercice 4 Résolution

Montrer à l'aide de la résolution que :

$$\models ([\forall x A(x)] \vee [\forall y B(y)]) \Rightarrow (\forall z, (A(z) \vee B(z))$$

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ \exists_g$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution