Examen (12 mai 2021)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du vendredi 14 mai 2020 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définit inductivement par :

(B) $(0, 0) \in D$,

(R) si $(n, m) \in D$ alors $(n + 1, m + (n + 1)^2) \in D$.

Monter que $D = \{(n, \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} | n \in \mathbb{N}\}$

Correction : On pose $E = \{(n, \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} | n \in \mathbb{N}\}$.

- $E \subset D$: par recurrence sur n, on montre que $\forall n, (n, \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}) \in D$
  — $n = 0$: $(0, 0) \in D$ par (B)
  — On suppose que $(n, \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}) \in D$. Alors,

$$\begin{array}{l} \frac{(n+1)*(n+2)*(2*(n+1)+1)}{6} = \\ \frac{(n+1)*(n+2)*(2*n+3)}{6} = \\ \frac{(n+1)*(2*n^2+7n+6)}{6} = \\ \frac{(n+1)*(n*(2*n+1)+6*(n+1))}{6} \\ \frac{(n+1)*n*(2*n+1)+6*(n+1)^2}{6} \\ \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} + (n+1)^2 \end{array}$$

par hypothèse, on sait que $(n, \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}) \in D$, donc $\frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6} \in D$ par R

- $D \subset E$ par induction sur la définition de D, on montre que $\forall (n, m) \in D, (n, m) \in E$
  — (B) : trivial.

— (R) : on suppose que $(n, m) in D$ et que $(n, m) \in E$. On sait alors que $m = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$. Il suffit de montrer que $(n, m. + (n+1)^2) \in E$ (cf plus haut).

Exercice 2 Logique propositionnelle : modélisation

On considère les énoncés suivants :

1. Si Zeus quitte l'Olympe alors il se change en taureau.
2. Si Zeus se change en taureau alors Héra est en colère.
3. Si Zeus reste sur l'Olympe, Héra est en colère.

Question 1 : Modéliser les énoncés.
Correction :

1. $\neg O \Rightarrow T$
2. $T \Rightarrow C$
3. $O \Rightarrow C$

Question 2 : Donner une démonstration sémantique du fait que Héra est quoi qu'il arrive en colère.
Correction : Soit Σ l'ensemble des propositions de la question 1. On veut montrer que $\Sigma \models C$.

Soit I telle que $I \models \Sigma$. Montrons que $I \models C$. On a deux cas :

- Si $I \models O$ alors, par (1), $I \models T$ et donc, par (2), $I \models C$.
- Si $I \models \neg O$ alors, par (3), $I \models C$.

Exercice 3 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash (A \land B) \Rightarrow [C \Rightarrow (C \land A)]$
2. $\vdash [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$
3. $\vdash [(\neg A) \lor B] \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow [(\neg A) \lor B]$
5. $\vdash [A \lor (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \lor B) \Rightarrow (A \lor C)]$ (difficile)

Correction :

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \land B, C \vdash C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \land B, C \vdash A \land B}\,ax}{A \land B, C \vdash A}\,\land_e^g}{A \land B, C \vdash C \land A}\,\land_i}{\vdash (A \land B) \Rightarrow [C \Rightarrow (C \land A)]}\,\Rightarrow_i *2$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,ax}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,ax}{\Gamma \vdash B}\,\Rightarrow_e}{\underbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A}_{\Gamma} \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\vdash [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]}\,\Rightarrow_i *3$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\neg A) \lor B, A \vdash (\neg A) \lor B}\,ax \quad \dfrac{}{(\neg A) \lor B, A, \neg A \vdash B}\,\neg_g \quad \dfrac{}{(\neg A) \lor B, A, B \vdash B}\,ax}{(\neg A) \lor B, A \vdash B}\,\lor_e}{\vdash [(\neg A) \lor B] \Rightarrow (A \Rightarrow B)}\,\Rightarrow_i *2$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, A \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{A \Rightarrow B, A \vdash A}\,ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow_e}{A \Rightarrow B, A \vdash (\neg A) \vee B}\,\vee_i^d \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A}\,ax}{A \Rightarrow B, \neg A \vdash (\neg A) \vee B}\,\vee_i^g}{A \Rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B}\,t.e}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow [(\neg A) \vee B]}\,\Rightarrow_i$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee (B \Rightarrow C)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax}{\Gamma, A \vdash A \vee C}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \Rightarrow C \vdash A \vee B}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \Rightarrow C, A \vdash A}\,ax}{\Gamma, B \Rightarrow C, A \vdash A \vee C}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \Rightarrow C, B \vdash B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, B \Rightarrow C, B \vdash B}\,ax}{\Gamma, B \Rightarrow C, B \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, B \Rightarrow C, B \vdash A \vee C}\,\vee_i^d}{\Gamma, B \Rightarrow C \vdash A \vee C}\,\vee_e}{\underbrace{A \vee (B \Rightarrow C), A \vee B}_{\Gamma} \vdash A \vee C}\,\vee_e}{\vdash [A \vee (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)]}\,\Rightarrow_i *2$$

Exercice 4 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle**.

Le monde de cet exercice sera exclusivement composé d'étudiants.

Les étudiants en retard n'assistent pas aux cours [1]. Les étudiants à l'heure (i.e. non en retard) assistent aux cours. Les barmen sont à l'heure. Les étudiants prenant le train ou possèdant un ordinateur sont (systématiquement) en retard. Les étudiants ne possédant pas d'ordinateur sont barmen [2].

Question 1 : Modéliser (soigneusement) le monde ainsi décrit.

Correction :

$$\Gamma = \begin{cases} \forall x, R(x) \Rightarrow \neg C(x) \\ \forall x, \neg R(x) \Rightarrow C(x) \\ \forall x, B(x) \Rightarrow \neg R(x) \\ \forall x, T(x) \vee O(x) \Rightarrow R(x) \\ \forall x, \neg O(x) \Rightarrow B(x) \end{cases}$$

Question 2 : Montrer que les barmen assistent aux cours.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B(x) \vdash \forall x, \neg R(x) \Rightarrow C(x)}\,ax}{\Gamma, B(x) \vdash \neg R(x) \Rightarrow C(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B(x) \vdash \forall x, B(x) \Rightarrow \neg R(x)}\,ax}{\Gamma, B(x) \vdash B(x) \Rightarrow \neg R(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, B(x) \vdash B(x)}\,ax}{\Gamma, B(x) \vdash \neg R(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, B(x) \vdash C(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash B(x) \Rightarrow C(x)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, B(x) \Rightarrow C(x)}\,\forall_i$$

Question 3 : Montrer que les étudiants prenant le train n'assistent pas aux cours

1. cf transparent 2 du cours de logique.
2. il faut bien occuper leurs journées

Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, T(x) \vdash \forall x, R(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,ax}{\Gamma, T(x) \vdash R(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, T(x) \vdash \forall x, T(x) \Rightarrow R(x)}\,ax}{\Gamma, T(x) \vdash T(x) \Rightarrow R(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, T(x) \vdash T(x)}\,ax}{\Gamma, T(x) \vdash R(x)}\,\Rightarrow_e}{\dfrac{\Gamma, T(x) \vdash \neg C(x)}{\Gamma \vdash T(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\Rightarrow_i}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash \forall x, T(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_i
$$

Question 4 : Montrer que les étudiants présents en cours ne prennent pas le train.
Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\underbrace{\Gamma, C(x), T(x)}_{\Delta} \vdash C(x)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{cf q. 3}}{\Delta \vdash \forall T(x) \Rightarrow \neg C(x)}}{\Delta \vdash T(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Delta \vdash T(x)}\,ax}{\Delta \vdash \neg C(x)}\,\Rightarrow_e}{\underbrace{\Gamma, C(x), T(x)}_{\Delta} \vdash \bot}\,\neg_e}{\dfrac{\Gamma, C(x) \vdash \neg T(x)}{\Gamma \vdash C(x) \Rightarrow \neg T(x)}\,\Rightarrow_i}\,\neg_i}{\Gamma \vdash \forall x, C(x) \Rightarrow \neg T(x)}\,\forall_i
$$

Question 5 : Montrer que les étudiants qui ne sont pas barman n'assistent pas aux cours. (attention difficile)
Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg B(x) \vdash \forall x, R(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,ax}{\Gamma, \neg B(x) \vdash R(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg B(x) \vdash \forall x, T(x) \vee O(x) \Rightarrow R(x)}\,ax}{\Gamma, \neg B(x) \vdash T(x) \vee O(x) \Rightarrow R(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \forall x, \neg O(x) \Rightarrow B(x)}\,ax}{\Delta \vdash \neg O(x) \Rightarrow B(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \neg O(x)}\,ax}{\Delta \vdash B(x)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \neg B(x)}\,ax}{\underbrace{\Gamma, \neg B(x), \neg O(x)}_{\Delta} \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg B(x) \vdash O(x)}\,\bot_c}{\Gamma, \neg B(x) \vdash T(x) \vee O(x)}\,\vee_i^d}{\Gamma, \neg B(x) \vdash R(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, \neg B(x) \vdash \neg C(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash \neg B(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, \neg B(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_i
$$

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ \exists_g$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution