Examen (18 mai 2022)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du jeudi 19 mai 2022 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définit inductivement par :

(B) $(0, 0) \in D$,

(R) si $(n, m) \in D$ alors $(n + 1, m + (n + 1)^3) \in D$.

Monter que $D = \{(n, \frac{n^2*(n+1)^2}{4} | n \in \mathbb{N}\}$

Correction : On pose $E = \{(n, \frac{n^2*(n+1)^2}{4} | n \in \mathbb{N}\}$.

- $E \subset D$: par recurrence sur n, on montre que $\forall n, (n, \frac{n^2*(n+1)^2}{4}) \in D$
  - $n = 0$: $(0, 0) \in D$ par (B)
  - On suppose que $(n, \frac{n^2(n+1)^2}{4}) \in D$. Alors,

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{n^2*(n+1)^2+4n(n+1)^2+4(n+1)^2}{4} = \frac{n^2*(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

    par hypothèse, on sait que $(n, \frac{n^2+(n+1)^2}{4}) \in D$, donc $(n + 1, \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}) \in D$ par R
- $D \subset E$ par induction sur la définition de D, on montre que $\forall (n, m) \in D, (n, m) \in E$
  - (B) : trivial.
  - (R) : on suppose que $(n, m) \in D$ et que $(n, m) \in E$. On sait alors que $m = \frac{n^2*(n+1)^2}{4}$. Il suffit de montrer que $(n + 1, m + (n + 1)^3) \in E$ (cf plus haut).

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \ ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
2. $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow \ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
3. $\vdash ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$
4. $\vdash (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$
5. $\vdash (\neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$ (difficile)

Correction :

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d}{\underbrace{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B}_{\Gamma} \vdash C}\Rightarrow_e}{\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \ ((A \wedge B) \Rightarrow C)}\Rightarrow_i *2$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{\underbrace{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B}_{\Gamma} \vdash C}\Rightarrow_e}{\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow \ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))}\Rightarrow_i *3$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B}\,ax}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B}\Rightarrow_e}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B \vee C}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow C \vdash A}\,ax}{\Gamma, A \Rightarrow C \vdash B}\Rightarrow_e}{\Gamma, A \Rightarrow C \vdash B \vee C}\,\vee_i^d}{\underbrace{(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C), A}_{\Gamma} \vdash B \vee C}\,\vee_e}{\vdash ((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))}\Rightarrow *2$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge \neg B}\,ax}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge \neg B}\,ax}{\Gamma \vdash \neg B}\,\wedge_e^d}{\underbrace{A \wedge \neg B, A \Rightarrow B}_{\Gamma} \vdash \bot}\,\neg_e}{A \wedge \neg B \vdash \neg(A \Rightarrow B)}\,\neg_i}{\vdash (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)}\Rightarrow_i$$

5.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash \neg B$}
\RightLabel{$\wedge_i$}
\BinaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash A \wedge \neg B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_c$}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A, \neg B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\neg(A \Rightarrow B), \neg(A \wedge \neg B)}_{\Gamma} \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot_c$}
\UnaryInfC{$\neg(A \Rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 3 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle**.

Le monde de cet exercice sera exclusivement composé d'étudiants et d'enseignants et de cours et se conforme aux règles suivantes [1] :

- Tous étudiants sont présents durant les cours,
- Tous les enseignants sont présents durant au moins un cours,
- Pour tout cours, un enseignant au moins est présent,
- Aucun enseignant n'assiste à tous les cours,
- Boule est un étudiant

Question 1 : Modéliser (soigneusement) le monde ainsi décrit.

Correction :

- $Ens(x)$: x est un enseignant,
- $Etu(x)$: x est un étudiant,
- $C(x)$: x est un cours,
- $P(x, y)$: x est présent à y

$$
\Gamma = \left\{
\begin{array}{l}
\forall x, \forall c, Etu(x) \Rightarrow C(c) \Rightarrow P(x, c) \\
\forall x, Ens(x) \Rightarrow \exists c, (C(c) \wedge P(x, c)) \\
\forall c, C(c) \Rightarrow \exists x, (Ens(x) \wedge P(x, c)) \\
\forall x, Ens(x) \Rightarrow \exists c, (C(c) \wedge \neg P(x, c)) \\
Etu(Cl)
\end{array}
\right.
$$

Question 2 : Montrer que Boule assiste à tous les cours.

Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x, \forall c, Etu(Cl) \Rightarrow C(c) \Rightarrow P(Cl, c)$}
\RightLabel{$\forall_e * 2$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash Etu(Cl) \Rightarrow C(c) \Rightarrow P(Cl, c)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash Etu(Cl)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash C(c) \Rightarrow P(Cl, c)$}
\RightLabel{$\forall_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall c, C(c) \Rightarrow P(Cl, c)$}
\end{prooftree}
$$

Question 3 : Montrer que si il existe un cours alors il existe un enseignant.

1. règles bien sur idéales

Correction :

$$
\cfrac{
  \cfrac{}{\Gamma, \exists c, C(c) \vdash \exists c, C(c)}\,ax
  \qquad
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{
        \cfrac{
          \cfrac{}{\Delta \vdash \forall c, C(c) \Rightarrow \exists x, \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c)}\,ax
        }{\Delta \vdash C(c) \Rightarrow \exists x, \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c)}\,\forall_e
        \quad
        \cfrac{}{\Delta \vdash C(c)}\,ax
      }{\Delta \vdash \exists x, \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c)}\,\Rightarrow_e
    }{\Delta \vdash \exists x, \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c)}\,\Rightarrow_e
    \quad
    \cfrac{
      \cfrac{
        \cfrac{}{\Delta, \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c) \vdash \mathit{Ens}(x) \wedge P(x,c)}\,ax
      }{\Delta, \mathit{Ens}(x) \wedge P(c,x) \vdash \mathit{Ens}(x)}\,\wedge_e^d
    }{\Delta, \mathit{Ens}(x) \wedge P(c,x) \vdash \exists e, \mathit{Ens}(e)}\,\exists_i
  }{\underbrace{\Gamma, \exists c, C(c), C(c)}_{\Delta} \vdash \exists e, \mathit{Ens}(e)}\,\exists_e
}{
  \cfrac{\Gamma, \exists c, C(c) \vdash \exists e, \mathit{Ens}(e)}{\Gamma \vdash (\exists c, C(c)) \Rightarrow \exists e, \mathit{Ens}(e)}\,\Rightarrow_i
}\,\exists_e
$$

Question 4 : Montrer que si Nicolas est un enseignant alors il existe un cours.
Correction : On ajoute une constante N

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{}{\Gamma, \mathit{Ens}(N) \vdash \forall x, \mathit{Ens}(x) \Rightarrow \exists c, C(c) \wedge \neg P(N,c)}\,ax
    }{\Gamma, \mathit{Ens}(N) \vdash \mathit{Ens}(N) \Rightarrow \exists c, C(c) \wedge \neg P(N,c)}\,\forall_e
    \quad
    \cfrac{}{\Gamma, \mathit{Ens}(N) \vdash \mathit{Ens}(N)}\,ax
  }{\Gamma, \mathit{Ens}(N) \vdash \exists c, C(c) \wedge \neg P(N,c)}\,\Rightarrow_e
  \quad
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{}{\Gamma, \mathit{Ens}(N), C(c) \wedge \neg P(N,c) \vdash C(c) \wedge \neg P(N,c)}\,ax
    }{\Gamma, \mathit{Ens}(N), C(c) \wedge \neg P(N,c) \vdash C(c)}\,\wedge_e^d
  }{\Gamma, \mathit{Ens}(N), C(c) \wedge \neg P(N,c) \vdash \exists c, C(c)}\,\exists_i
}{
  \cfrac{\Gamma, \mathit{Ens}(N) \vdash \exists c, C(c)}{\Gamma \vdash \mathit{Ens}(N) \Rightarrow \exists c, C(c)}\,\Rightarrow_i
}\,\exists_e
$$

Question 5 : Montrer que l'on ne peut être à la fois étudiant et enseignant.

Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \forall x, Ens(x) \Rightarrow \exists c, (C(c) \land \neg P(x,c))$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash Ens(x) \Rightarrow \exists c, (C(c) \land \neg P(x,c))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash Ens(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash \exists c, (C(c) \land \neg P(x,c))$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash C(c) \land \neg P(x,c)$}
\RightLabel{$\land_e^g$}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash \neg P(x,c)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash \forall x, \forall x, Etu(c) \Rightarrow C(c) \Rightarrow P(x,c)$}
\RightLabel{$\forall_e * 2$}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash Etu(c) \Rightarrow C(c) \Rightarrow P(x,c)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash C(c) \land Etu(c)$}
\RightLabel{$\land_e^d$}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash Etu(c)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Theta \vdash C(c) \Rightarrow P(x,c)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash C(c) \land Etu(c)$}
\RightLabel{$\land_e^d$}
\UnaryInfC{$\Theta \vdash C(c)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Theta \vdash P(x,c)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\Delta, C(c) \land \neg P(x,c)}_{\Theta} \vdash \bot$}
\RightLabel{$\exists_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\Gamma, Etu(x), Ens(x)}_{\Delta} \vdash \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i *2$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash Etu(x) \Rightarrow Ens(x) \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$\forall_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x, Etu(x) \Rightarrow Ens(x) \Rightarrow \bot$}
\end{prooftree}
$$

RÈGLES DE LA DÉDUCTION NATURELLE

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, \text{ ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ \exists_g$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution