Examen (17 mai 2023)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du jeudi 18 mai 2023 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

On définit D inductivement comme suit :

(B) $(0,0) \in D$

(R) Si $(i,j) \in D$ alors $(2j, i+1) \in D$

Question 1 : Donner quatre éléments de D.

Correction : $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$

Question 2 : Montrer que si $(a,b) \in D$ alors $b = a+1$ ou $a = 2b$.

Correction : Par induction structurelle sur D.

- $(0,0) = (0, 2*0)$ donc Ok
- Si $(a,b) \in D$ tel que $b = a+1$ ou $a = 2*b$, on pose $(c,d) = (2*b, a+1)$ et on montre que $d = c+1$ ou $c = 2*d$.
  On a deux cas :
  — Si $b = a+1$ alors $c = 2*a+2$ et $d = a+1$ donc $c = 2*d$.
  — Si $a = 2*b$ alors $c = 2*b$ et $d = a+1 = 2*b+1$ donc $d = c+1$.

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash [(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{\underbrace{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B}_{\Gamma} \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\vdash [(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]}\,\Rightarrow_i *3$$

2. $\vdash [A \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \Rightarrow C), A \vdash A \wedge (B \Rightarrow C)}\,ax}{A \wedge (B \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C}\,\wedge_e^d}{\vdash [A \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]}\,\Rightarrow_i *2$$

3. $\vdash [(\neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [B \Rightarrow (A \vee C)]$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash A}\,ax}{\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, A \vdash A \vee C}\,\vee_i^g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg A}\,ax}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\underbrace{\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C, B, \neg A}_{\Gamma} \vdash A \vee C}\,\vee_i^d}{\dfrac{\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C, B \vdash A \vee C}{\vdash [\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C] \Rightarrow [B \Rightarrow (A \vee C)]}\,\Rightarrow_i *2}\,t.e$$

4. $\vdash [B \Rightarrow (A \vee C)] \Rightarrow [(\neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash B \Rightarrow A \vee C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash A \vee C}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{}{\Gamma, C \vdash C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash C}\,\neg_g}{\underbrace{B \Rightarrow (A \vee C), \neg A, B}_{\Gamma} \vdash C}\,\vee_e}{\vdash [B \Rightarrow (A \vee C)] \Rightarrow [(\neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow C)]}\,\Rightarrow_i *3$$

Exercice 3 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle**.

Le monde de cet exercice est composé de musiciens et d'instruments de musique. Les musiciens peuvent être en colère (ou pas), jouer de la musique (ou pas) et faire du bruit (ou pas).

Après une étude poussée fournie par le `Directoire Férocement Personnel`, les constatations suivantes ont été faites :

1. tout musicien sait utiliser au moins un instrument de musique;
2. toute personne en colère fait du bruit;
3. tout musicien jouant de la musique ne peut pas faire de bruit;
4. toute personne jouant de la musique sait utiliser un instrument au moins;
5. toute personne sachant utiliser d'un instrument est un musicien;
6. pour produire du bruit, il faut savoir utiliser au moins un instrument de musique;

Question 1 : Modéliser en logique du premier ordre le monde ainsi décrit

Correction : On se place dans le monde suivant :

- Mus prédicat unaire modélisant le fait d'être un musicien
- Ins prédicat unaire modélisant le fait d'être une instrument
- C prédicat unaire modélisant le fait d'être en colère
- MM prédicat unaire modélisant le fait de produire de la musique
- B prédicat unaire modélisant le fait de faire du bruit
- U prédicat binaire modélisant le fait que le premier argument sait utiliser le second

On peut alors modéliser comme suit :

1. $\forall x, Mus(x) \Rightarrow \exists y, Ins(y) \wedge U(x,y)$
2. $\forall x, C(x) \Rightarrow B(x)$
3. $\forall x, MM(x) \Rightarrow \neg B(x)$
4. $\forall x, MM(x) \Rightarrow \exists y, Ins(y) \wedge U(x,y)$
5. $\forall x, \forall y, Ins(y) \Rightarrow U(x,y) \Rightarrow Mus(x)$
6. $\forall x, B(x) \Rightarrow \exists y, U(x,y) \wedge Ins(y)$

Pour toute la suite du sujet on pose $\Gamma = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\}$

Question 2 : Montrer que les personnes ne faisant pas de bruit ne sont pas en colère.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, C(x) \Rightarrow B(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash C(x) \Rightarrow B(x)}\,\forall_e}{\underbrace{\Gamma, \neg B(x), C(x)}_{\Gamma_1} \vdash B(x)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg B(x), C(x) \vdash \neg B(x)}\,ax}{\Gamma, \neg B(x), C(x) \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg B(x) \vdash \neg C(x)}\,\neg_i}{\Gamma \vdash \neg B(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, \neg B(x) \Rightarrow \neg C(x)}\,\forall_i$$

Question 3 : Montrer que les musiciens faisant du bruit ne jouent pas de musique
Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash B(x)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, MM(x) \Rightarrow \neg B(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash MM(x) \Rightarrow \neg B(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash MM(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash \neg B(x)}\,\Rightarrow_e}{\underbrace{\Gamma, B(x), MM(x)}_{\Gamma_1} \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma \vdash B(x) \Rightarrow \neg MM(x)}\,\neg_i}{\Gamma \vdash \forall x, B(x) \Rightarrow \neg MM(x)}\,\forall_i$$

Question 4 : Montrer que si il existe un musicien, alors il existe un instrument de musique
Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \exists x, Mus(x) \vdash \exists x, Mus(x)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, Mus(x) \Rightarrow \exists z, Ins(z) \wedge U(x,z)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash Mus(x) \Rightarrow \exists z, Ins(z) \wedge U(x,z)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash Mux(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash \exists z, Ins(z) \wedge U(x,z)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, Ins(z) \wedge U(x,z) \vdash Ins(z) \wedge U(x,z)}\,ax}{\Gamma_1, Ins(z) \wedge U(x,z) \vdash Ins(z)}\,\wedge_e^d}{\Gamma_1, Ins(z) \wedge U(x,z) \vdash \exists y, Ins(y)}\,\exists_i}{\underbrace{\Gamma, \exists x, Mus(x), Mus(x)}_{\Gamma_1} \vdash \exists y, Ins(y)}\,\exists_e}{\Gamma, \exists x, Mus(x) \vdash \exists y, Ins(y)}\,\exists_e}{\Gamma \vdash \exists x, Mus(x) \Rightarrow \exists y, Ins(y)}\,\Rightarrow_i$$

Question 5 :[difficile] Montrer que les personnes en colère sont des musiciens.
Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, C(x) \vdash \forall x, B(x) \Rightarrow \exists y, U(x,y) \wedge Ins(y)}\,ax}{\Gamma, C(x) \vdash B(x) \Rightarrow \exists y, U(x,y) \wedge Ins(y)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, C(x) \vdash \forall x, C(x) \Rightarrow B(x)}\,ax}{\Gamma, C(x) \vdash C(x) \Rightarrow B(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, C(x) \vdash C(x)}\,ax}{\Gamma, C(x) \vdash B(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, C(x) \vdash \exists y, U(x,y) \wedge Ins(y)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\mathcal{P}_1}{\Gamma, C(x), U(x,y) \wedge Ins(y) \vdash Mus(x)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, C(x) \vdash Mus(x)}\,\exists_e}{\Gamma \vdash C(x) \Rightarrow Mus(x)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall x, C(x) \Rightarrow Mus(x)}\,\forall_i$$

avec $\mathcal{P}_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, \forall y, Ins(y) \Rightarrow U(x,y) \Rightarrow Mus(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash Ins(y) \Rightarrow U(x,y) \Rightarrow Mus(x)}\,\forall_2 * 2 \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash U(x,y) \wedge Ins(y)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash Ins(y)}\,\wedge_e^d}{\Gamma_1 \vdash U(x,y) \Rightarrow Mus(x)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash U(x,y) \wedge Ins(y)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash U(x,y)}\,\wedge_e^g}{\underbrace{\Gamma, C(x), U(x,y) \wedge Ins(y)}_{\Gamma_1} \vdash Mus(x)}\,\Rightarrow_e$$

Exercice 4 Résolution

On définit F et U comme étant des prédicats unaire et E comme étant un prédicat binaire.

On se donne l'ensemble de formules suivante :

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (1)\ \forall x, \exists y, U(x) \Rightarrow (F(y) \wedge E(x,y)) \\ (2)\ \exists z, U(z) \\ (3)\ \neg(\exists t, F(t)) \end{array} \right\}$$

Question 1 : Montrez en utilisant la résolution que cet ensemble est contradictoire.

Correction :

$$\Gamma^c = \left\{ \begin{array}{l} (a)\ \neg U(x) \vee F(f(x)) \\ (b)\ \neg U(x) \vee E(x,y) \\ (c)\ U(x_0) \\ (d) \neg F(t) \end{array} \right\}$$

puis

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\neg U(x) \vee F(f(x))} \qquad \overline{U(x_0)}}{F(f(x_0))}\ \{x := x_0\} \qquad \overline{\neg F(t)}}{\emptyset}\ \{t := f(x_0)\}$$

Question 2 : Que peut-on en déduire pour la formule suivante :

$$(\forall x, \exists y, U(x) \Rightarrow (F(y) \wedge E(x,y))) \Rightarrow [(\exists z, U(z)) \Rightarrow \exists t, F(t)]$$

Expliquez clairement votre raisonnement.

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

Règles de la résolution

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ (\exists_g)$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution