Examen (22 mai 2024)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du jeudi 23 mai 2024 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~julien.forest/LOGI12`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

Soit A l'ensemble $\{a, b\}$. Un *mot* sur A est une suite finie d'éléments de A. On définit l'opération de *concaténation* sur les mots de A comme étant $u.v$ est la suite u suivie de la suite v. On note ϵ la suite vide (le mot sans lettre). On note A^* l'ensemble des mots sur A.

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble défini inductivement de la manière suivante :

- $\epsilon \in \mathcal{X}$;
- Si $u \in \mathcal{X}$ alors $a.a.u.b \in \mathcal{X}$
- Si $u \in \mathcal{X}$ alors $b.u.a.a \in \mathcal{X}$

Pour tout mot u, on note $|u|_a$ (resp. $|u|_b$) le nombre de a (resp. b) contenu dans le mot u.

Soit $\mathcal{Y} = \{u,\ |u|_a = 2\,|u|_b\}$.

Question 1 : Montrer que $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$

Correction : Par induction sur $\mathcal{X}$.

- $u = \epsilon$: trivial.
- Soit $u \in \mathcal{X}$ telle que $u \in \mathcal{Y}$, on montre que $a.a.u.b \in \mathcal{Y}$. $|a.a.u.b|_a = 2 + |u|_a$ et $|a.a.u.b|_b = 1 + |u|_b$. On sait que $|u|_a = 2\,|u|_b$ puisque $u \in \mathcal{Y}$. On conclu donc de manière triviale.
- Soit $u \in \mathcal{X}$ telle que $u \in \mathcal{Y}$, on montre que $b.u.a.a \in \mathcal{Y}$. $|b.u.a.a|_a = 2 + |u|_a$ et $|b.u.a.a|_b = 1 + |u|_b$. On sait que $|u|_a = 2\,|u|_b$ puisque $u \in \mathcal{Y}$. On conclu donc de manière triviale.

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash [(A \wedge B) \wedge C] \Rightarrow [A \wedge (B \wedge C)]$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \wedge C}\,ax}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_e^d}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \wedge C}\,ax}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_e^g}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \wedge C}\,ax}{\Gamma \vdash C}\,\wedge_e^d}{\Gamma \vdash B \wedge C}\,\wedge_i}{\underbrace{(A \wedge B) \wedge C}_{\Gamma} \vdash A \wedge (B \wedge C)}\,\wedge_i}{\vdash [(A \wedge B) \wedge C] \Rightarrow [A \wedge (B \wedge C)]}\,\Rightarrow_i$$

2. $\vdash [(A \wedge B) \vee C] \Rightarrow [(A \vee C) \wedge (B \vee C)]$

Correction :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{(A \wedge B) \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}\;ax
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash A \wedge B}\;ax}{\Gamma_1 \vdash A}\;\wedge_e^g}{\underbrace{(A \wedge B) \vee C, A \wedge B}_{\Gamma_1} \vdash A \vee C}\;\vee_i^g
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_g \vdash C}\;ax}{\underbrace{(A \wedge B) \vee C, C}_{\Gamma_2} \vdash A \vee C}\;\vee_i^g
}{(A \wedge B) \vee C \vdash A \vee C}\;\vee_e
\quad
\dfrac{
\dfrac{}{(A \wedge B) \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C}\;ax
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_3 \vdash A \wedge B}\;ax}{\Gamma_3 \vdash B}\;\wedge_e^d}{\underbrace{(A \wedge B) \vee C, A \wedge B}_{\Gamma_3} \vdash B \vee C}\;\vee_i^g
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_4 \vdash C}\;ax}{\underbrace{(A \wedge B) \vee C, C}_{\Gamma_4} \vdash B \vee C}\;\vee_i^g
}{(A \wedge B) \vee C \vdash B \vee C}\;\vee_e
}{
\dfrac{(A \wedge B) \vee C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)}{\vdash [(A \wedge B) \vee C] \Rightarrow [(A \vee C) \wedge (B \vee C)]}\;\Rightarrow_i
}\;\wedge_i
$$

3. $\vdash [C \Rightarrow (A \vee B)] \Rightarrow \{[(\neg A) \wedge (\neg B)] \Rightarrow \neg C\}$
Correction :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma \vdash C \Rightarrow A \vee B}\,ax
      \quad
      \dfrac{}{\Gamma \vdash C}\,ax
    }{\Gamma \vdash A \vee B}\,\Rightarrow_e
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax
      \quad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash \neg A \wedge \neg B}\,ax}{\Gamma, A \vdash \neg A}\,\wedge_e^g
    }{\Gamma, A \vdash \bot}\,\neg_e
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}\,ax
      \quad
      \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash \neg A \wedge \neg B}\,ax}{\Gamma, B \vdash \neg B}\,\wedge_e^d
    }{\Gamma, B \vdash \bot}\,\neg_e
  }{\underbrace{C \Rightarrow (A \vee B), (\neg A) \wedge (\neg B), C}_{\Gamma} \vdash \bot}\,\vee_e
}{
  \dfrac{C \Rightarrow (A \vee B), (\neg A) \wedge (\neg B) \vdash \neg C}{\vdash [C \Rightarrow (A \vee B)] \Rightarrow \{[(\neg A) \wedge (\neg B)] \Rightarrow \neg C\}}\,\Rightarrow_i *2
}\,\neg_i
$$

4. [difficile] $\vdash \{[(\neg A) \wedge (\neg B)] \Rightarrow \neg C\} \Rightarrow [C \Rightarrow (A \vee B)]$
Correction :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax
    }{\Gamma, A \vdash A \vee B}\,\vee_i^g
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{\Gamma, \neg A, B \vdash B}\,ax
      }{\Gamma, \neg A, B \vdash A \vee B}\,\vee_i^d
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{\Delta \vdash C}\,ax
          \quad
          \dfrac{
            \dfrac{}{\Delta \vdash (\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C}\,ax
            \quad
            \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \neg A}\,ax \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \neg B}\,ax}{\Delta \vdash \neg A \wedge \neg B}\,\wedge_i
          }{\Delta \vdash \neg C}\,\Rightarrow_e
        }{\underbrace{\Gamma, \neg A, \neg B, \neg(A \vee B)}_{\Delta} \vdash \bot}\,\neg_e
      }{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash A \vee B}\,\bot_c
    }{\Gamma, \neg A \vdash A \vee B}\,t.e
  }{\underbrace{[(\neg A) \wedge (\neg B)] \Rightarrow \neg C, C}_{\Gamma} \vdash A \vee B}\,t.e
}{\vdash \{[(\neg A) \wedge (\neg B)] \Rightarrow \neg C\} \Rightarrow [C \Rightarrow (A \vee B)]}\,\Rightarrow_i *2
$$

Exercice 3 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle**.

Seules les notions en gras sont à modéliser.

Le monde [1] de cet exercice se compose de personnes qui peuvent être des **infirmiers**, des **sorciers** ou de simples personnes. Les personnes peuvent **utiliser des trucs en fer**. Une personne peut **piquer le derrière** d'une personne. Enfin une personne peut être **vieille**.

Les règles de ce monde sont les suivantes :

1. Toute personne piquant le derrière d'une personne est un sorcier
   Correction : $\forall x, \forall y, P(x, y) \Rightarrow S(x)$
2. Si une personne utilise des trucs en fer, alors cette personne pique le derrière d'au moins une personne
   Correction : $\forall x, UTF(x) \Rightarrow \exists y, P(x, y)$.
3. Toute personne piquant le derrière d'une personne utilise un truc en fer.
   Correction : $\forall x, \forall y, P(x, y) \Rightarrow UTF(x)$
4. Seuls les infirmiers utilisent des trucs en fer.
   Correction : $\forall x, UTF(x) \Rightarrow I(x)$.
5. Les sorciers sont vieux.
   Correction : $\forall x, S(x) \Rightarrow V(x)$
6. **Fred** est une personne dont le derrière est piqué.
   Correction : $\exists x, P(x, F)$

Question 1 : Modélier soigneusement le monde ainsi décrit.
Correction : cf plus haut. On pose Γ l'ensemble de ces hypothèses.

Question 2 : Montrer que les personnes piquant des derrières sont vielles.

1. inspiré d'une vielle chanson enfantine

Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \exists y, P(x,y) \vdash (5)$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \exists y, P(x,y) \vdash S(x) \Rightarrow V(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, \exists y, P(x,y) \vdash \exists y, P(x,y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash (1)$}
\RightLabel{$\forall_e * 2$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash P(x,y) \Rightarrow S(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash P(x,y)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\Gamma, \exists y, P(x,y), P(x,y)}_{\Delta} \vdash S(x)$}
\RightLabel{$\exists_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \exists y, P(x,y) \vdash S(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \exists y, P(x,y) \vdash V(x)$}
\RightLabel{$\forall_i + \Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x, (\exists y, P(x,y)) \Rightarrow V(x)$}
\end{prooftree}
$$

Question 3 : Montrer que les infirmiers utilisant des trucs en fer sont des sorciers
Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash (2)$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash UTF(x) \Rightarrow \exists y, P(x,y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash UTF(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash \exists y, P(x,y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta, P(x,y) \vdash (1)$}
\RightLabel{$\forall_e * 2$}
\UnaryInfC{$\Delta, P(x,y) \vdash P(x,y) \Rightarrow S(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta, P(x,y) \vdash P(x,y)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta, P(x,y) \vdash S(x)$}
\RightLabel{$\exists_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\Gamma, I(x), UTF(x)}_{\Delta} \vdash S(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i *2$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash I(x) \Rightarrow UTF(x) \Rightarrow S(x)$}
\RightLabel{$\forall_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x, I(x) \Rightarrow UTF(x) \Rightarrow S(x)$}
\end{prooftree}
$$

Question 4 : Montrer que les jeunes infirmiers n'utilisent pas de trucs en fer.
Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash (5)$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash S(x) \Rightarrow V(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$q3$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \forall x, I(x) \Rightarrow UTF(x) \Rightarrow S(x)$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash I(x) \Rightarrow UTF(x) \Rightarrow S(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash I(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash UTF(x) \Rightarrow S(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash UTF(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash S(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Delta \vdash V(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Delta \vdash \neg V(x)$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\underbrace{\Gamma, I(x), \neg V(x), UTF(x)}_{\Delta} \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma, I(x), \neg V(x) \vdash \neg UTF(x)$}
\RightLabel{$\forall_i + \Rightarrow_i *2$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \forall x, I(x) \Rightarrow \neg V(x) \Rightarrow \neg UTF(x)$}
\end{prooftree}
$$

Question 5 : Montrer qu'il existe un infirmier
Correction :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (6)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash (4)$}
\RightLabel{$\forall_e$}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash UTF(x) \Rightarrow I(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash (3)$}
\RightLabel{$\forall_e * 2$}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash P(x,F) \Rightarrow UTF(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash P(x,F)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash UTF(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash I(x)$}
\RightLabel{$\exists_i$}
\UnaryInfC{$\Gamma, P(x,F) \vdash \exists x, I(x)$}
\RightLabel{$\exists_e$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \exists x, I(x)$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 4 Résolution

Soient P et I deux prédicats unaires, 0 un symbole de constante et s un symbole de fonction unaire.
On se donne l'ensemble de formules suivant :

$$
\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} (1)\ P(0) \\ (2)\ \forall x, (P(x) \Rightarrow I(s(x))) \\ (3) \forall y, (I(y) \Rightarrow P(s(y))) \\ (4) \neg \exists z, P(s(s(z))) \end{array} \right\}
$$

Question 1 : Donner les formes de Skolem associées à Γ.
Correction :

$$
\Gamma^s = \left\{ \begin{array}{l} (1)\ P(0) \\ (2)\ \forall x, (P(x) \Rightarrow I(s(x))) \\ (3) \forall y, (I(y) \Rightarrow P(s(y))) \\ (4) \forall z, \neg P(s(s(z))) \end{array} \right\}
$$

Question 2 : En déduire, l'ensemble des clauses associées.
Correction :

$$\Gamma^c = \left\{ \begin{array}{l} (a)\ P(0); \\ (b)\ \neg P(x) \vee I(s(x)); \\ (c)\ \neg I(y) \vee P(s(y)); \\ (d)\ \neg P(s(s(z))) \end{array} \right\}$$

Question 3 : Montrer, en utilisant la résolution que Γ est contradictoire.
Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P(0)} \qquad \overline{\neg P(x) \vee I(s(x))}}{I(s(0))}\ x := 0 \qquad \overline{\neg I(y) \vee P(s(y))}}{P(s(s(0)))}\ y := s(0) \qquad \overline{\neg P(s(s(z)))}}{\emptyset}\ z := s(s(0))$$

Question 4 : Que peut-on en déduire pour la formule :

$$(\forall x, (P(x) \Rightarrow I(s(x)))) \Rightarrow (P(0) \Rightarrow \{(\forall y, (I(y) \Rightarrow P(s(y)))) \Rightarrow \exists z, P(s(s(z)))\})$$

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, \text{ ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

Règles de la résolution

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B} \ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A} \ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A} \ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B} \ (\exists_g)$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma} \ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma} \ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma} \ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution