Examen (15 mai 2025)

Durée : 1h30. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à l'adresse http://web4.ensiie.fr/$\sim$julien.forest/LOGI12 à partir du vendredi 16 mai 2025.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Question préliminaire :

Comme annoncé en cours, toute réponse **fausse** ou **non réponse** à cette question entraîne **automatiquement** la note 0 à la copie.

Question 0 : Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Exercice 1 Induction

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble inductif défini par :

($\mathcal{B}$) $Z \in \mathcal{N}$,

($\mathcal{K}$) Si $n \in \mathcal{N}$, alors $S(n) \in \mathcal{N}$.

Sur cet ensemble, on définit inductivement la fonction add : $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ par :

- $\forall n, add(Z, n) = n$,
- $\forall m, \forall n, add(S(m), n) = S(add(m, n))$.

On définit également sur cet ensemble la fonction $double$: $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ par :

- $double(Z) = Z$
- $\forall n, double(S(n)) = S(S(doublen))$

On admet que :

- pour tout $x \in \mathcal{N}$, on a $add(x, Z) = x$;
- pour tout $x \in \mathcal{N}$ et pour tout $y \in \mathcal{N}$, on a $S(add(x, y)) = add(x, S(y))$.

Question 1 : Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{N}$, on a $add(x, x) = double(x)$.

Question 2 : Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{N}$ et pour tout $y \in \mathcal{N}$, on a $add(x, y) = add(y, x)$.

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash (A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg A$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow \bot, A \vdash A \Rightarrow \bot}\,ax \quad \dfrac{}{A \Rightarrow \bot, A \vdash A}\,ax}{A \Rightarrow \bot, A \vdash \bot}\,\Rightarrow_e}{A \Rightarrow \bot \vdash \neg A}\,\neg_i}{\vdash (A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg A}\,\Rightarrow_i$$

2. $\Gamma \vdash (\neg\neg A) \Rightarrow A$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\neg A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_g}{\Gamma, \neg\neg A \vdash A}\,\bot_c}{\Gamma \vdash (\neg\neg A) \Rightarrow A}\,\Rightarrow_i$$

3. $\vdash [(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)] \Rightarrow (\neg\neg(A \wedge B))$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{cf q 2}}{\Gamma \vdash (\neg\neg A) \Rightarrow A} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg B}\,ax}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\wedge_e^g}{\Gamma \vdash A}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\dfrac{\text{cf q 2}}{\Gamma \vdash (\neg\neg B) \Rightarrow B} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \neg\neg A \wedge \neg\neg B}\,ax}{\Gamma \vdash \neg\neg B}\,\wedge_e^d}{\Gamma \vdash B}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)}\,ax}{\underbrace{(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B), \neg(A \wedge B)}_{\Gamma} \vdash \bot}\,\neg_e}{(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B) \vdash \neg\neg(A \wedge B)}\,\neg_i}{\vdash [(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)] \Rightarrow (\neg\neg(A \wedge B))}\,\Rightarrow_i$$

4. $\vdash (\neg\neg(A \wedge B)) \Rightarrow [(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)]$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G \vdash \neg\neg(A \wedge B)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G, A \wedge B \vdash \neg A}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_G, A \wedge B \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma_G, A \wedge B \vdash A}\,\wedge_e^g}{\Gamma_G, A \wedge B \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma_G \vdash \neg(A \wedge B)}\,\neg_i}{\underbrace{\neg\neg(A \wedge B), \neg A}_{\Gamma_G} \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg\neg(A \wedge B) \vdash \neg\neg A}\,\neg_i \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D \vdash \neg\neg(A \wedge B)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D, A \wedge B \vdash \neg B}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_D, A \wedge B \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma_D, A \wedge B \vdash B}\,\wedge_e^d}{\Gamma_D, A \wedge B \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma_D \vdash \neg(A \wedge B)}\,\neg_i}{\underbrace{\neg\neg(A \wedge B), \neg B}_{\Gamma_D} \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg\neg(A \wedge B) \vdash \neg\neg B}}{\neg\neg(A \wedge B) \vdash (\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)}\,\wedge_i}{\vdash (\neg\neg(A \wedge B)) \Rightarrow [(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)]}\,\Rightarrow_i$$

Exercice 3 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle**.

Seules les notions en gras sont à modéliser.

Notre monde sera composé de robots de deux types : les **astrorobots** et les **droides de protocole**. Tout robot est un **astrorobot** ou un **droide de protocole** (ou les deux). Tous **droides de protocole donnent des ordres** à tous **astrorobots**. Aucun robot ne se donne d'ordre à lui même. Les astrorobots et eux seuls **réparent des choses**. **BB8** répare des choses. **C3PO** ne répare rien [1].

Question 1 : Modéliser le monde décrit ci-dessus.

Correction :

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x, A(x) \vee P(x) \\ \forall x, \forall y, P(x) \Rightarrow A(y) \Rightarrow Or(x, y) \\ \forall x, \neg Or(x, x) \\ \forall x, A(x) \Rightarrow R(x) \\ \forall x, R(x) \Rightarrow A(x) \\ R(bb8) \\ \neg R(C3PO) \end{array} \right\}$$

Question 2 : Montrer que BB8 est un astrorobot.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, R(x) \Rightarrow A(x)}\,ax}{\Gamma \vdash R(bb8) \Rightarrow A(bb8)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash R(bb8)}\,ax}{\Gamma \vdash A(bb8)}\,\Rightarrow_e$$

Question 3 : Montrer que C3PO est un droide de protocole.

1. ce qui vaut mieux pour tout le monde.

Correction :

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, A(x) \vee P(x)}\,ax}{\Gamma \vdash A(C3PO) \vee P(C3PO)}\,\forall_e
\qquad
\dfrac{
\underbrace{\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Xi \vdash \forall x, A(x) \Rightarrow R(x)}\,ax}{\Xi \vdash A(C3PO) \Rightarrow R(C3PO)}\,\forall_e
\quad
\dfrac{}{\Xi \vdash A(C3PO)}\,ax
}{\Xi \vdash R(C3PO)}\,\Rightarrow_e
\quad
\dfrac{}{\Xi \vdash \neg R(C3PO)}\,ax
}{\Gamma, A(C3PO), \neg P(C3PO) \vdash \bot}\,\neg_e}_{\Xi}
}{\Gamma, A(C3PO) \vdash P(C3PO)}\,\bot_c
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, P(C3PO) \vdash P(C3PO)}\,ax
}{\Gamma \vdash P(C3PO)}\,\vee_e
$$

Question 4 : Montrer qu'aucun robot n'est en même temps un **astrorobot** et un **droide de protocole**.
Correction :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x, A(x) \vee P(x)}\,ax}{\Gamma \vdash A(x) \vee P(x)}\,\forall_e
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\underbrace{\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \forall x, \forall y, P(x) \Rightarrow A(y) \Rightarrow Or(x,y)}\,ax}{\Delta \vdash P(x) \Rightarrow A(x) \Rightarrow Or(x,x)}\,\forall_e * x
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash P(x)}\,ax
}{\Delta \vdash A(x) \Rightarrow Or(x,x)}\,\Rightarrow_e
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash A(x)}\,ax
}{\Delta \vdash Or(x,x)}\,\Rightarrow_e
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \forall x, \neg Or(x,x)}\,ax}{\Delta \vdash \neg Or(x,x)}\,\forall_e
}{\Gamma, A(x), P(x) \vdash \bot}\,\neg_e}_{\Delta}
}{\Gamma, A(x) \vdash \neg P(x)}\,\neg_i
}{\Gamma, A(x) \vdash \neg A(x) \vee \neg P(x)}\,\vee_i^d
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\vdots}{\Delta \vdash \bot}
}{\Gamma, A(x) \vdash \neg P(x)}\,\neg_i
}{\Gamma, A(x) \vdash \neg A(x) \vee \neg P(x)}\,\vee_i^g
}{\Gamma \vdash \neg A(x) \vee \neg P(x)}\,\vee_e
}{\Gamma \vdash \forall x, \neg A(x) \vee \neg P(x)}\,\forall_i
$$

ou

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma, \exists x, A(x) \wedge P(x) \vdash \exists x, A(x) \wedge P(x)}\,ax
\qquad
\underbrace{\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \forall x \forall y, P(x) \Rightarrow A(y) \Rightarrow Or(x,y)}\,ax}{\Delta \vdash P(x) \Rightarrow A(x) \Rightarrow Or(x,x)}\,\forall_e * 2
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash A(x) \wedge P(x)}\,ax}{\Delta \vdash P(x)}\,\wedge_e^g
}{\Delta \vdash A(x) \Rightarrow Or(x,x)}\,\Rightarrow_e
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash A(x) \wedge P(x)}\,ax}{\Delta \vdash A(x)}\,\wedge_e^d
}{\Delta \vdash Or(x,x)}\,\Rightarrow_e
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \forall x, \neg Or(x,x)}\,ax}{\Delta \vdash \neg Or(x,x)}\,\forall_e
}{\Gamma, \exists x, A(x) \wedge P(x), A(x) \wedge P(x) \vdash \bot}\,\neg_e}_{\Delta}
}{\Gamma, \exists x, A(x) \wedge P(x) \vdash \bot}\,\exists_e
}{\Gamma \vdash \neg \exists x, A(x) \wedge P(x)}\,\neg_i
$$

Question 5 : Montrer que BB8 n'est pas un droide de protocole.
Correction :

$$
\dfrac{
\dfrac{\text{cf question 4}}{\Gamma \vdash \neg A(bb8) \vee \neg P(bb8)}\,\forall_e
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, \neg A(bb8) \vdash \neg P(bb8)}\,\neg_g
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, \neg P(bb8) \vdash \neg P(bb8)}\,ax
}{\Gamma \vdash \neg P(bb8)}\,\vee_e
$$

ou

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\text{cf q 2}}{\Gamma, P(bb8) \vdash A(bb8)}
\qquad
\dfrac{}{\Gamma, P(bb8) \vdash P(bb8)}\,ax
}{\Gamma, P(bb8) \vdash A(bb8) \wedge P(bb8)}\,\wedge_i
}{\Gamma, P(bb8) \vdash \exists x, A(x) \wedge P(x)}\,\exists_i
\qquad
\dfrac{\text{cf q 4}}{\Gamma \vdash \neg \exists x, A(x) \wedge P(x)}
}{\Gamma, P(bb8) \vdash \bot}\,\neg_e
}{\Gamma \vdash \neg P(bb8)}\,\neg_i
$$

Exercice 4 Résolution

On se donne deux prédicats binaires P et A et f un symbole unaire, et l'ensemble de clause suivante

$$\Gamma^c = \{P(x_1, f(x_1)), \neg P(x_2, y_2) \vee \neg P(y_2, z_2) \vee A(x_2, z_2), \neg A(c, y_3)\}$$

Question 1 : Montrer que Γ^c est contradictoire.
Correction :

$$
\dfrac{
P(x_1, f(x_1))
\qquad
\dfrac{
P(x_1, f(x_1))
\qquad
\dfrac{
\neg P(x_2, y_2) \vee \neg P(y_2, z_2) \vee A(x_2, z_2)
\quad
\neg A(c, y_3)
}{\neg(P(c, y_2)) \vee \neg P(y_2, y_3)}\; x_2 := c, x_2 := y_3
}{P(f(c), y_3)}\; x_1 := c, y_2 := f(c)
}{\bot}\; y_3 := f(f(c)), x_1 = f(c)
$$

Question 2 : En justifiant soignement votre raisonnement, en déduire que l'ensemble Γ suivant est contradictoire.

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x_1 \exists y_1 P(x_1, y_1) \\ \forall x_2, \forall z_2, \forall y_2, [(P(x_2, y_2) \wedge P(y_2, z_2)) \Rightarrow A(x_2, z_2)] \\ \exists x_3 \forall y_3 \neg A(x_3, y_3) \end{array} \right\}$$

Correction : Skolemization + mise en FNC

Question 3 : Que peut-on en déduire pour la formule F suivante ? Justifiez votre réponse.

$$F = (\forall x_1 \exists y_1 P(x_1, y_1)) \Rightarrow (\forall x_2, \forall z_2, \forall y_2, [(P(x_2, y_2) \wedge P(y_2, z_2)) \Rightarrow A(x_2, z_2)]) \Rightarrow (\forall x_3 \exists y_3 A(x_3, y_3))$$

Correction : on applique le cours et on tombe sur Γ qui est contradictoire donc F est valide.

RÈGLES DE LA DÉDUCTION NATURELLE

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ (\exists_g)$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution