

Examen (27 mai 2026)

Durée : 1h30. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question ou d'un exercice pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à l'adresse <http://web4.ensiie.fr/~julien.forest/LOGI12> à partir du vendredi 29 mai 2026.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Exercice 1 Induction

Soit \mathcal{N} l'ensemble inductif défini par :

$$(\mathcal{B}_1) \quad Z \in \mathcal{N}$$

$$(\mathcal{B}_2) \quad U \in \mathcal{N}$$

$$(\mathcal{K}) \quad \text{Si } n \text{ et } m \text{ sont dans } \mathcal{N} \text{ alors } F(n, m) \in \mathcal{N}$$

Sur cet ensemble, on définit inductivement la fonction $toNat : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par :

- $toNat(Z) = 0$
- $toNat(U) = 1$
- $toNat(F(n, m)) = 2 \times toNat(n) + toNat(m)$

On définit également la fonction $triple : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ par :

- $triple(Z) = Z$
- $triple(U) = F(U, U)$
- $triple(F(n, m)) = F(triple(n), triple(m))$

Question 1 : Montrer que $\forall n \in \mathcal{N}, toNat(triple(n)) = 3 \times toNat(n)$

Correction : Par induction sur $n \in \mathcal{N}$.

(Z)

$$\begin{aligned} toNat(triple(Z)) &= toNat(Z) \\ &= 0 \\ &\text{et} \\ 3 \times toNat(Z) &= 3 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(U)

$$\begin{aligned} toNat(triple(U)) &= toNat(F(U, U)) \\ &= 2 \times toNat(U) + toNat(U) \\ &= 3 \times toNat(U) \end{aligned}$$

(C) Soient n et $m \in \mathcal{N}$ tels que $toNat(triple(n)) = 3 \times toNat(n)$ et $toNat(triple(m)) = 3 \times toNat(m)$

$$\begin{aligned} toNat(triple(F(n, m))) &= toNat(F(triple(n), triple(m))) \\ &= 2 \times toNat(triple(n)) + toNat(triple(m)) \\ &=_{His} 2 \times 3 \times toNat(n) + 3 \times toNat(m) \\ &= 3 \times toNat(F(n, m)) \end{aligned}$$

Question 2 :

Donner une définition inductive de la fonction $succ : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ telle que : $\forall n, toNat(succ(n)) = 1 + toNat(n)$.

Il ne vous est pas demandé de faire la preuve de cette propriété.

Correction : $succ$ est défini par :

- $succ(Z) = U$
- $succ(U) = F(U, Z)$
- $succ(F(m, n)) = F(m, succ(n))$

Si besoin la preuve de correction est facile par induction.

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash [(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$

Correction :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash A} \text{ ax} \quad \overline{\Gamma \vdash B} \text{ ax}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i}{(A \wedge B) \Rightarrow C, A, B \vdash C} \Rightarrow_e}{\Gamma} \Rightarrow_i *3$$

2. $\vdash [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [(A \wedge B) \Rightarrow C]$

Correction :

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash A \wedge B} \text{ ax}}{\Gamma \vdash A} \wedge_e}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C} \Rightarrow_e \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash A \wedge B} \text{ ax}}{\Gamma \vdash B} \wedge_e}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \wedge B \vdash C} \Rightarrow_e}{\Gamma} \Rightarrow_i *2$$

3. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \{(\neg B) \Rightarrow (\neg A)\}$

Correction :

$$\frac{\frac{\overline{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash A \Rightarrow B} \text{ ax} \quad \overline{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash A} \text{ ax}}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash B} \Rightarrow_e \quad \overline{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \neg B} \text{ ax}}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \neg A} \neg_e}{A \Rightarrow B, \neg B, A \vdash \neg A} \neg_i}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \{(\neg B) \Rightarrow (\neg A)\}} \Rightarrow_i *2$$

4. $\vdash (\neg\neg A) \Rightarrow \neg\neg(A \vee B)$

Correction :

$$\frac{\frac{\overline{\neg\neg A, \neg(A \vee B) \vdash \neg\neg A} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\neg\neg A, \neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)} \text{ ax} \quad \frac{\overline{\neg\neg A, \neg(A \vee B), A \vdash A} \text{ ax}}{\neg\neg A, \neg(A \vee B), A \vdash A \vee B} \vee_i^g}{\neg\neg A, \neg(A \vee B), A \vdash \neg A} \neg_e}{\neg\neg A, \neg(A \vee B), A \vdash \perp} \neg_i}{\neg\neg A, \neg(A \vee B) \vdash \perp} \neg_i}{\neg\neg A \vdash \neg\neg(A \vee B)} \neg_i}{\vdash (\neg\neg A) \Rightarrow \neg\neg(A \vee B)} \Rightarrow_i$$

5. $\vdash [(A \wedge B) \vee C] \Rightarrow (A \vee C)$

Correction :

$$\frac{\overline{(A \wedge B) \vee C \vdash (A \wedge B) \vee C} \text{ ax} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma_3 \vdash A \wedge B} \text{ ax}}{\Gamma_3 \vdash A} \wedge_e \quad \overline{\Gamma_4 \vdash C} \text{ ax}}{(A \wedge B) \vee C, A \wedge B \vdash A \vee C} \vee_i^g \quad \frac{\overline{\Gamma_4 \vdash C} \text{ ax}}{(A \wedge B) \vee C, C \vdash A \vee C} \vee_i^d}{(A \wedge B) \vee C \vdash A \vee C} \vee_e}{\vdash [(A \wedge B) \vee C] \Rightarrow (A \vee C)} \Rightarrow_i$$

Exercice 3 Logique du premier ordre :

Les preuves de cet exercice sont à faire à l'aide de la **déduction naturelle** et au **premier ordre**.

Seules les notions **en gras** sont à modéliser.

Le monde de cet exercice se divise en deux catégories : les **Pokemons** et les **Dresseurs** (il est, a priori, possible d'être les deux en même temps). Tout personnage de notre monde est un dresseur ou un pokemon.

RÈGLES DE LA DÉDUCTION NATURELLE

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A, \Gamma \vdash A} \text{ (ax)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} \text{ (aff)} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ (}\Rightarrow_i\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ (}\Rightarrow_e\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \text{ (}\wedge_i\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \text{ (}\wedge_e^g\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \text{ (}\wedge_e^d\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ (}\vee_i^g\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ (}\vee_i^d\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \text{ (}\vee_e\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \text{ (}\neg_i\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{ (}\neg_e\text{)} \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{ (}\perp_c\text{)}
 \end{array}$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A} \text{ (}\forall_i\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \text{ (}\forall_e\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A} \text{ (}\exists_i\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, \text{ ni dans } B}{\Gamma \vdash B} \text{ (}\exists_e\text{)}
 \end{array}$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\Gamma \vdash t = t} \text{ (=}_i\text{)} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} \text{ (=}_e\text{)}
 \end{array}$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\begin{array}{c}
\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{ (ax2)} \\
\overline{\Gamma, A, \neg A \vdash B} \text{ } (\neg_g) \\
\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \text{ (contr)} \\
\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{ (t.e.)} \\
\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A} \text{ (Pierce)} \\
\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A} \text{ (Affgen)} \\
\frac{A, \Gamma \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B} \text{ } (\exists_g)
\end{array}$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \vee C_2\sigma} A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma} A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma} A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution