Chapitre 1

# La théorie des sous-ensembles flous

*Nous présentons dans ce chapitre, le concept de base de sous-ensemble flou. C'est à partir de cette idée extrêmement simple que peuvent être généralisées les relations unaires telles que «x est grand» ou «x est très grand» et des relations binaires telles que «x est voisin de y» ou «x est nettement plus petit que y», puis les quantificateurs flous. Ce concept est adapté à la description des situations intermédiaires, telles que «la plupart», «peu de», «presque tous» ...*

## 1.1. Ensembles flous, nombres flous

Dans un ensemble de référence E, depuis [Zadeh 65] et [Kaufmann 72], un sous-ensemble flou de ce référentiel E est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu$ de E dans l'intervalle des nombres réels [0, 1] (degré d'appartenance qui est l'extension de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble classique). En fait un sous-ensemble flou (nous dirons plus brièvement un ensemble flou) est formellement défini par l'application $\mu$, mais pour se ramener au langage des mathématiques classiques, nous parlerons d'un ensemble flou A, et noterons $\mu_A$ sa fonction d'appartenance.

NOYAU, SUPPORT ET OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES FLOUS

Pour un sous-ensemble flou A d'un référentiel E on donne les définitions suivantes :

| | |
|---|---|
| Noyau $N(A) = \{x \,/\, \mu_A(x) = 1\}$ | Les éléments «vraiment» dans A. |
| Support $S(A) = \{x \,/\, \mu_A(x) \neq 0\}$ | Ceux qui y sont à des degrés divers. |

Pour un ensemble classique A, noyau et support sont confondus avec A, et sa fonction caractéristique $\mu$ n'admet que 0 ou 1 pour valeurs.

EXEMPLE D'ENSEMBLES FLOUS

L'intervalle flou couramment utilisé dans R est décrit par sa fonction d'appartenance. Le plus simple type pour ce qu'il est convenu d'appeler un «intervalle flou» est une représentation trapézoïdale :

$$\text{On pose } \mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \text{ (x hors du support de A)} \\ 1 \text{ si } a < x < b, \text{ (x dans le noyau de A)} \\ 1 + (x - a) / \alpha \text{ si } a - \alpha < x < a, \\ 1 - (b - x) / \beta \text{ si } b < x < b + \beta \end{cases}$$

La notation $(a, b, \alpha, \beta)$, souvent utilisée dans les applications informatiques, est alors très simple pour ces «intervalles flous».

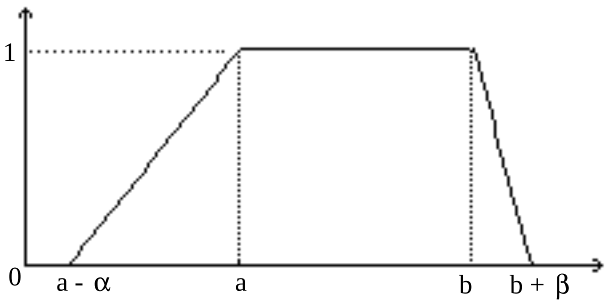


**Figure 1.1** Ensemble flou trapézoïdal

Une représentation à côtés paraboliques (figure 1.2) est parfois employée avec :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \text{ (x hors du support de A)} \\ 1 \text{ si } a < x < b, \text{ (x dans le noyau de A)} \\ \text{si } a - \alpha < x < a - \alpha/2 \text{ alors } 2(x - a + \alpha)^2/\alpha^2 \\ \text{si } a - \alpha/2 < x < a \text{ alors } 1 + 2(x - a)^2/\alpha^2 \\ \text{si } b < x < b + \beta/2 \text{ alors} 1 - 2(b - x)^2/\beta^2 \\ \text{si } a + \beta/2 < x < b \text{ alors } 2(x - b + \beta)^2/\beta^2 \end{cases}$$

Dans les deux cas [a, b] est le noyau, $[a - \alpha , b + \beta]$ est le support. On utilise aussi des fonctions gaussiennes $\mu(x) = \exp[-(x - m)^2 / 2\sigma^2)]$ atteignant 1 uniquement pour la valeur modale m.

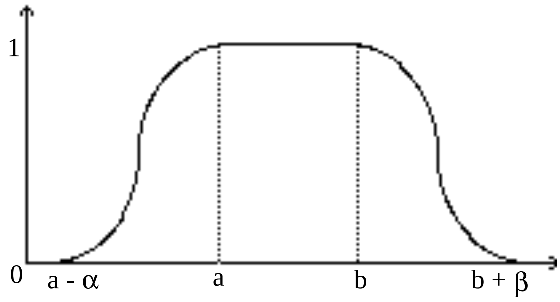


**Figure 1.2** Exemple d'ensemble flou convexe

LES NOMBRES FLOUS TRIANGULAIRES

Ils sont définis par $\mu(x) = 1$ pour $x = m$ (le mode), par 0 si $|x - m| > \sigma$, et enfin par le fait que $\mu$ est continue et affine par morceaux. Plus généralement par deux fonctions L, R semi-continues inférieurement, de valeur 1 en 0, décroissantes au sens large et de limite 0 à l'infini (ci-dessous, figure gauche). La fonction d'appartenance est alors définie par $\mu(x)$ = si $x < m$ alors $L(m - x)$ sinon $R(x - m)$. On pourra voir plus loin qu'en définissant les opérations arithmétiques sur des ensembles flous réels, la somme de nombres triangulaires reste un nombre triangulaire.

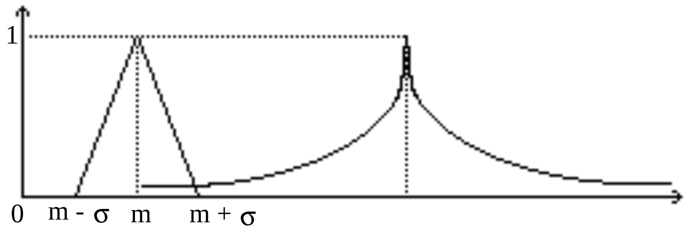


**Figure 1.3** Nombres flous triangulaire et quelconque

Soit par exemple (m, a, b) une notation commode pour le nombre flou de mode m, dont le noyau est l'intervalle [m - a, m + b] et à «pentes droites», alors on peut vérifier des relations simples (m, a, b) + (m', a', b') = (m + m', a + a', b + b') et pour la différence (m, a, b) - (m', a', b') = (m - m', a - a', b - b').
Mais ce n'est plus vrai pour le produit et le quotient, ce qui oblige tous les systèmes à base de connaissances adoptant cette représentation simple à faire des approximations quant aux résultats opératoires afin de conserver une représentation homogène.

HAUTEUR D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU

C'est la borne supérieure $ht(A) = \sup_{(x \in X)} \mu_A(x)$ de la fonction d'appartenance, aussi n'est-elle pas nécessairement atteinte. Par exemple, si G comme «grand» est l'ensemble flou défini par th(x) sur $R^+$, th(x) croît de la valeur 0 en 0 vers la limite 1 quand x tend vers l'infini, mais cette limite 1 n'est jamais atteinte (figure 1.4 ci-dessous). Le noyau de G est l'ensemble vide, son support est $R^{+*}$ et sa hauteur 1.

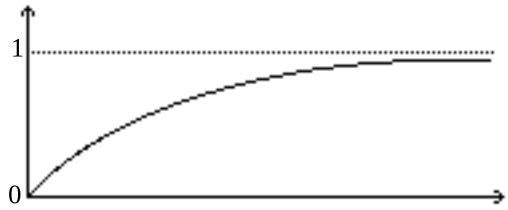


**Figure 1.4** Ensemble flou de hauteur 1 non atteinte

ENSEMBLE FLOU NORMALISÉ

Un ensemble flou est dit normalisé s'il est de hauteur 1.

ENSEMBLES FLOUS DISCRETS

Si le support d'un ensemble flou est fini, il est possible de donner la fonction d'appartenance par l'énumération de ses valeurs, ainsi par exemple dans le référentiel E = {a, b, c, d}, on note habituellement A = {a / 0.1, b / 0.5, c / 0.3, d / 0} (ou en couples, en indices ou encore avec le «deux points») le sous-ensemble flou formellement défini par les degrés d'appartenance :

$$\mu(a) = 0.1,\ \mu(b) = 0.5,\ \mu(c) = 0.3 \text{ et } \mu(d) = 0.$$

INCLUSION

Par définition, l'inclusion est étendue grâce à : $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$

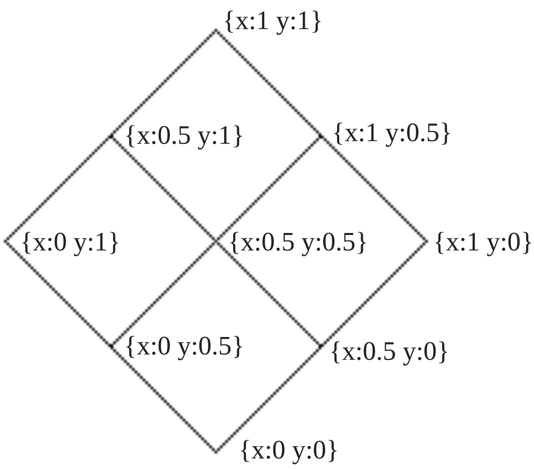


**Figure 1.5** Exemple des parties floues d'un ensemble fini E = {x, y} en se limitant aux seuls degrés d'appartenances 0, 0.5 et 1. Le treillis de tous les sous-ensembles flous avec ces seules valeurs, est formé des 9 parties ci-dessous dont 4 sont exactes (sans la valeur 0.5) et les 5 autres floues.

Cette définition d'inclusion est une simple relation de domination entre les fonctions d'appartenance, on peut facilement vérifier qu'elle généralise l'inclusion des ensembles classiques. Par exemple, on pourrait définir A = «trentaine» et B = «adulte» par des ensemble flous avec A inclus dans B.

**Exercice 1.1**
Représenter le treillis des parties floues de E = {x, y} avec les valeurs d'appartenances 0, 1/4, 1/2, 3/4. Puis en se limitant aux valeurs 0, 1/2, 1, mais pour E = {x, y, z}

**Exercice 1.2**
Combien y a-t-il de parties floues dans un ensemble de n éléments, si on se limite à p valeurs d'appartenance ? (Réponse $p^n$).

### COMPLÉMENT D'UN SOUS-ENSEMBLE FLOU

Le complémentaire d'un ensemble flou A dans un ensemble de référence E est naturellement défini par la relation (nous utiliserons le symbole de négation ¬) :

$$\mu_{\neg A} = 1 - \mu_A$$

Cette opération est involutive, c'est à dire ¬¬A = A, on a d'autre part les propriétés ¬Ø = E et ¬E = Ø. Ce n'est cependant pas un complément au sens des treillis car en général : $A \cap \neg A \neq \emptyset$ et $A \cup \neg A \neq E$ mais c'est la seule opération n possible sur les degrés d'appartenance, qui soit une fonction continue strictement décroissante, renversant les valeurs de 0 et 1 et vérifiant n(x) + n(1 - x) = 1, elle est alors involutive (n composée avec elle-même donne l'identité n(n(x)) = x).
On peut remarquer que pour la négation, support et noyau d'un ensemble flou sont des notions duales (si E est le référentiel) :

$$\mathrm{supp}(\neg A) = E - \mathrm{noy}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{noy}(\neg A) = E - \mathrm{supp}(A)$$

**Exercice 1.3**
Trouver une fonction continue, strictement décroissante, involutive sur [0, 1] qui ne soit pas le complément à 1 ordinaire f(x) = 1 - x. Montrer qu'il en existe une infinité.

### UNION, INTERSECTION

On définit l'union et l'intersection de deux ensembles flous A et B, comme respectivement le plus petit ensemble flou contenant A et B, et le plus grand ensemble flou contenu dans A et dans B d'autre part. En d'autres termes :

$$\mu_{A\cup B} = \max(\mu_A , \mu_B) \qquad \mu_{A\cap B} = \min(\mu_A , \mu_B)$$

Toutes les propriétés de treillis distributif et les relations de Morgan demeurent,
ainsi l'idempotence $A \cap A = A$ $A \cup A = A$
la commutativité $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
l'associativité :
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
les distributivités mutuelles
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
les relations de Morgan
$\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$ $\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$
et les lois d'absorption $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

La démonstration de ces propriétés est issue des propriétés analogues pour min, max et le complément à 1.
Par contre $A \cap \neg A = Ø$ et $A \cup \neg A = E$ ne sont plus vrais.
Il faut remarquer que tout ensemble «vraiment flou» c'est à dire non exact, et défini par une fonction d'appartenance continue, coupera toujours son complémentaire à la hauteur 1/2.
Ceci, signifiant qu'un fait et son contraire peuvent coexister, constitue un point commun avec les logiques multivaluée ou intuitionniste qui remettent en cause le principe du «tiers-exclu» (annexe 1).
On justifie les choix de min et de max par le fait que ce sont les seules opérations possédant les propriétés de commutativité, idempotence, associativité, distributivités mutuelles, continues, mais vérifiant également :

$$\mu_{A \cap B} \leq \mu_A,\ \mu_B \leq \mu_{A \cup B} \quad \text{ainsi que} \quad \min(1, 1) = 1 \text{ et } \max(0, 0) = 0$$

L'union et l'intersection sont illustrées par les figures ci-dessous (cependant d'autres définitions peuvent être prises comme on le verra au chapitre 3, en gras dans la figure droite, par exemple le simple produit des deux fonctions d'appartenances) :

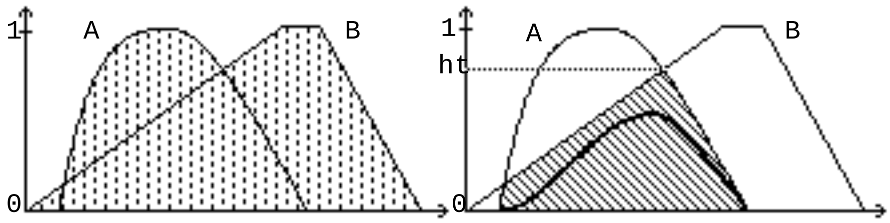


**Figure 1.6** Union et intersection de deux ensembles flous

CARDINAL D'UN ENSEMBLE FLOU

On peut définir le nombre d'éléments d'un ensemble flou A par card(A) = $\sum \mu_A(x)$ dans le cas fini, et par l'intégrale de la fonction d'appartenance $\mu_A$ si A est continu. On retrouve bien le nombre d'éléments dans le cas où A est exact.

PRODUIT CARTÉSIEN

Le produit cartésien est défini par $\mu_{A*B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$.
Si R est un ensemble flou de E*F (une relation floue) sa projection sur E sera définie par $\mu_{\pi(R,\ E)} = \sup\{\mu_R(x, y) / y \in F\}$ conformément au principe d'extension énoncé plus loin.

DISTANCE DE HAMMING

La notion de distance entre ensembles flous peut être utile pour définir des relations telles que «à peu près égal» ou «très supérieur à», il s'agit :
soit de la distance de Hamming : $d(A, B) = \sum_{(x \in E)} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$ qui est l'intégrale $\int_R |\mu_A(x) - \mu_B(x)|\, dx$ sur l'ensemble des réels R,
soit de la distance euclidienne $e^2(A, B) = \sum_{(x \in E)} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2$.

En outre, si le référentiel est fini, il peut être intéressant de définir une distance relative par le rapport $\delta(A, B) = d(A, B) / card(E)$ qui sera maximal égal à 1 entre les parties vide et pleine.

**Exercice 1.4**
En mesurant les distances de Hamming entre les sous-ensembles flous figurés sur le treillis de la page précédente, montrer que chaque arc correspond à la même distance et que ces distances s'additionnent quel que soit le chemin montant ou descendant. Etudier cette distance sur les treillis de l'exercice 1.1.

## ALPHA-COUPES D'UN ENSEMBLE FLOU A ET INDICES

Ce sont les ensembles exacts définis par $A_\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\}$, on a les propriétés : $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
Mais en général, et sauf pour 1/2, on a $(\neg A)_{1-\alpha} \neq \neg(A_\alpha)$.

## SOUS-ENSEMBLE VULGAIRE ASSOCIÉ À UN ENSEMBLE FLOU

$\underline{A} = \{x / \mu_A(x) \geq 0.5\}$ est l'ensemble des x que l'on peut davantage considérer dans A que dans son complémentaire. $\underline{A}$ minimise la distance euclidienne entre les deux.
On peut établir les relations $\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$, $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$ et $\underline{\neg A} = \neg\underline{A}$

**Exercice 1.5**
Soit (G, .) un groupe c'est à dire un ensemble muni d'une loi binaire notée par le point, qui est associative, qui possède un élément neutre noté 1, et telle que pour tout x de G, il existe un inverse x' vérifiant x.x' = x'.x = 1. Un sous-groupe est une partie de G stable pour l'inverse et l'opération binaire. Montrer que si A est un sous-ensemble flou de G, on a les équivalences :

$\forall x \in G \quad \mu_A(x') \geq \mu_A(x)$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in G \quad \mu_A(x.y') \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1] \quad A_\alpha$ sous-groupe de G.

On dira alors que A est un groupe flou dans G.

### INDICE DE FLOU [Kaufmann 72]

Plusieurs indices ont été proposés afin de caractériser l'aspect plus ou moins flou d'un sous ensemble. Celui de Kaufmann, dans le cas où E est fini est :

$\nu(A) = 2*d(A, \underline{A}) / n = 2*( \sum_{(x \in E)} \mu_{A \cap \neg A}(x) )/n$

C'est un élément de [0, 1] pouvant caractériser le «flou» avec les propriétés :

$\nu(\neg A) = \nu(A)$ et $\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$

Exemple : pour un ensemble flou représenté par un «λ-trapèze» sur l'univers [U, V] (λ représente le niveau d'incertitude qu'il y a à être dans le support):

$\nu(A) = 2*\int_{[U, V]} |\mu_A(x)-\mu_{\underline{A}}(x)|\, dx / (V - U)$

$= 2*[\lambda*(V - U + a - b) + (\alpha + \beta)*(2*\lambda^2 - 4*\lambda + 1) / 4*(1 - \lambda)] / (V - U)$ si $\lambda \leq 1/2$

$= 2*(1 - \lambda)*[V - U + a - b - (\alpha + \beta) / 2] / (V - U)$ si $\lambda \geq 1/2$

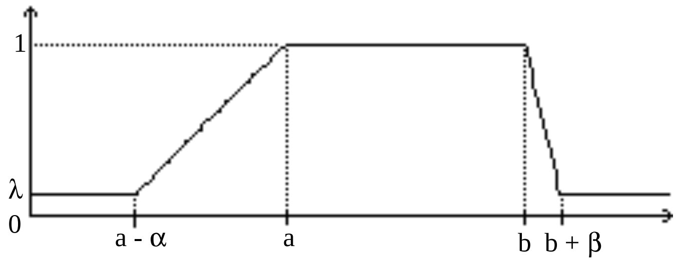


**Figure 7** Exemple de lambda-trapèze

Si $\lambda = 0$ (cas de la certitude) $\nu(A) = (\alpha + \beta) / 2*(V - U)$ est donc directement proportionnel à l'amplitude des «pentes» du trapèze, il est au maximum égal à 1/2 pour $\alpha + \beta = V - U$ donc $a = b$ .

Si $\lambda = 0$ et $\alpha + \beta = 0$ (certitude et précision) alors l'indice de flou est nul.

Si l'ensemble trapézoïdal vérifie $\alpha + \beta = 0$ (non flou, mais incertain) alors dans le cas $\lambda < 1/2$, $\nu(A) = 2\lambda(1 - (b-a) /(V-U))$, sinon, $\nu(A) = 2(1 - \lambda)(1 - (b-a) /(V-U))$

Le cas de $\nu(A) = 1$ est réalisé par l'ensemble sans noyau de fonction d'appartenance $\lambda = 1$.

Un autre indice a été proposé par $\nu(A) = 1 - (\sum_{x \in E} |\mu_A(x) - \mu_{\neg A}(x)| )/n$

DEGRÉ DE FLOU [Deluca, Termini 72]

$d(A) = - \sum_{x \in E} [\mu_A(x)*\log \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x))*\log (1 - \mu_A(x))]$

Par analogie avec l'entropie (chapitre 5) avec la convention 0log0 = 0, ce degré mesure bien l'aspect flou car il est minimal et égal à zéro pour les ensembles non flous.

**Exercice 1.6**

Vérifier que d(A) est minimal de valeur 0 si et seulement si A est un ensemble exact, et maximal égal à 1 pour l'ensemble flou dont la fonction d'appartenance est constante égale à 1/2.

SPÉCIFICITÉ D'UN ENSEMBLE FLOU [Yager 93]

Cette notion a été établie afin de donner un indice de la précision en posant :

$$S(A) = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{card(A_\alpha)}$$

Exemple, si A = {a / 1, b / 0.7, c / 0.3, d / 0.1}, alors :
S(A) = 0.1 / 4 + (0.3 - 0.1) / 3 + (0.7 - 0.3) / 2 + (1 - 0.7) / 1 = 0.592
On a en général $0 \le S(A) \le 1$, si A exact, alors S(A) = 1 / card(A) et donc :

$S(A) = 1 \Leftrightarrow$ A est un singleton non flou, c'est l'ensemble le plus spécifique possible contenant exactement un élément.

Décroissance de S : $A \subset B \Rightarrow S(A) \ge S(B)$, on peut donc convenir que S(Ø) est 1.

**Exercice 1.7**

Pour un ensemble flou trapézoïdal de R défini par le noyau [a, b] et [a - $\alpha$, b + $\beta$] pour support, montrer que sa spécificité est ln [1 + ($\alpha$ + $\beta$) / (a + b)] / ($\alpha$ + $\beta$).

ENSEMBLES FLOUS CONVEXES

Un ensemble flou est convexe $\Leftrightarrow \forall a, b\ \ \forall x \in [a, b]\ \ \mu(x) \geq \min(\mu(a), \mu(b))$
La fonction d'appartenance est «quasi-concave» ce qui fait que toutes ses $\alpha$-coupes sont des intervalles. (Attention ce n'est pas la définition usuelle des fonctions convexes, il n'y a pas de minimum relatif pour $\mu$). Ainsi A et B dans la figure plus haut illustrant l'union et l'intersection, sont convexes mais non leur union.

**Exercice 1.8**

Montrer que la définition d'ensemble flou convexe sur $R^n$ correspond au fait que pour tout $\alpha$, l'ensemble $A_\alpha$ est un ensemble convexe de $R^n$ (c'est à dire contient tous ses segments $\forall x, y \in A_\alpha\ \forall \lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A_\alpha$).

INDICE DE CHEVAUCHEMENT

En définissant ht (A, B) = sup (min ($\mu_A$, $\mu_B$)) ce sera la notion très importante de «possibilité que A soit B» ou «compatibilité entre A et B» (chapitre 2) utilisée dans la plupart des systèmes qui doivent confronter une donnée à une référence afin d'apprécier à quel degré la donnée observée A vérifie la donnée de référence B, mais on peut aussi définir le chevauchement par card (A $\cap$ B) / card (A $\cup$ B).

INDICE D'INCLUSION

Plusieurs définitions ont été proposées pour le degré d'inclusion de A dans B, par exemple I(A, B) = card (A $\cap$ B) / card (A) = $\sum\mu_{A \cap B} / \sum\mu_B$ (degré d'inclusion de Sanchez) ou plutôt :
1 - ht (A $\cap \neg$B) = inf max (1 - $\mu_A$, $\mu_B$) qui est un indice plus fort car égal à 1 uniquement si le support de A est inclu dans le noyau de B. Ce sera la «nécessité que A soit B» qui, cette fois-ci, n'est pas une définition symétrique.

INDICE D'ÉGALITÉ

Si I est un indice d'inclusion, min [I (A $\subset$ B), I (B $\subset$ A)] est la traduction floue de «A inclus dans B et réciproquement».

INDICE D'INTERSECTION

J (A, B) = card (A $\cap$ B) / card (A $\cup$ B) est l'indice de Jacquart, mais on trouve encore le rapport R(A, B) = ht(A $\cap$ B) / ht (A $\cup$ B)

**Exercice 1.9**

Vérifier que pour ces indices, A = B $\Rightarrow$ J = R = 1 et que si les supports sont disjoints, J = R = 0

PRINCIPE D'EXTENSION DE ZADEH

Ce principe énoncé pour toute relation exacte $\phi$ entre deux ensembles E et F, permet la généralisation au flou d'un certain nombre de concepts :

**Si A est un sous ensemble flou de E, son image B par $\phi$ sera définie par :**
$$\mu_B(y) = \sup\{\min(\mu_\phi(x, y), \mu_A(x) \,/\, x \in E\}$$

En particulier, si $\phi$ est une application de E dans F, on peut définir un sous-ensemble flou B de F qui sera l'image par $\phi$ d'un sous-ensemble flou A de E par $\mu_B(\phi(x)) = \mu_A(x)$ dans le cas où $\phi$ est injective, et si plusieurs éléments de E admettent la même image alors $\mu_B(y) = \sup\{\mu_A(x) \,/\, \phi(x) = y\}$, ce qui signifie que chaque fois que y est obtenu, son degré d'appartenance au résultat est le meilleur degré de toutes les façons de l'obtenir et égal à 0 sinon.
Ce principe d'extension est une sorte de «sup-min convolution», il sera d'ailleurs à l'origine de bien des définitions, en particulier du modus-ponens généralisé.

**Exercice 1.10**
Dans R, on donne l'intervalle flou trapézoïdal A de noyau [1, 2] ayant pour support [0, 5] et $\phi(x) = x^2$, montrer que l'image B de A par $\phi$ est de noyau [0, 1] et décrit par deux arcs de paraboles entre 1 et 9.

**Exercice 1.11**
Si $\phi(x) = \sin x$ et A est le nombre flou centré sur 0 de support [-p, p], quel est l'ensemble flou image B? Le représenter pour $p = \pi$.

ARITHMÉTIQUE SUR LES INTERVALLES FLOUS

Sur R, on définit conformément au principe d'extension une somme par :
$$\mu_{A+B}(z) = \max\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, x + y = z\}$$
Chaque fois que z est obtenu comme une somme, son degré d'appartenance est le meilleur parmi les décompositions.
La multiplication par $\mu_{A.B}(z) = \max\{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \,/\, xy = z\}$
Comme cas particuliers se pose alors le problème de donner des approximations trapézoïdales à A + B et A.B car bien sûr rien n'indique que A + B l'est.
L'addition de nombres flous sera donnée par :
$$(a, b, \alpha, \beta) + (a', b', \alpha', \beta') = (a + a', b + b', \alpha + \alpha', \beta + \beta')$$
Multiplication par un scalaire positif $\lambda$ : $\lambda (a, b, \alpha, \beta) = (\lambda a, \lambda b, \lambda \alpha, \lambda \beta)$
Par contre il est beaucoup plus difficile de définir la multiplication et la division, voir [Dubois, Prade 79].

**Exercice 1.12**
$A_1 = \{1/0,6 \;\; 2/0,8 \;\; 3/1 \;\; 4/0,6\}$ et $A_2 = \{0/0,5 \;\; 1/0,7 \;\; 2/0,9 \;\; 3/1 \;\; 4/0,4\}$.
Trouver $A_1 + A_2$ et $A_1 * A_2$.

**Exercice 1.13**

La méthode de définition des opérations arithmétiques par les $\alpha$-coupes est la suivante, si A et B sont des intervalles flous (donc des sous ensembles flous convexes), et si on note $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$, alors A + B, A - B, A.B, A/B sont respectivement définis par leurs $\alpha$-coupes $(A + B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+]$,

$(A - B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+), \max(a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+)]$,

$(A . B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+),$

$\max(a_\alpha^- b_\alpha^-, a_\alpha^- b_\alpha^+, a_\alpha^+ b_\alpha^-, a_\alpha^+ b_\alpha^+)]$,

et $(A / B)_\alpha = [\min(a_\alpha^- / b_\alpha^-, a_\alpha^- / b_\alpha^+, a_\alpha^+ / b_\alpha^-, a_\alpha^+ / b_\alpha^+), \max(a_\alpha^- / b_\alpha^-, a_\alpha^- / b_\alpha^+, a_\alpha^+ / b_\alpha^-, a_\alpha^+ / b_\alpha^+)]$. Montrer pour l'addition, que cette définition coïncide avec celle donnée par le principe d'extension.

LES ENSEMBLES BIFLOUS

[Krassimir Atanassov 86] a étendu la notion d'ensemble A «flou intuitioniste» ou «biflou» dans un un ensemble E par la donnée de deux fonctions : l'appartenance $\mu_A$ et la non-appartenance $\nu_A$ toutes deux dans [0, 1] avec la condition supplémentaire : $0 \le \mu_A + \nu_A \le 1$.

On définit alors le complémentaire par $\mu_{\neg A} = \nu_A$ et $\nu_{\neg A} = \mu_A$, l'inclusion grâce à la relation $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A \le \mu_B$ et $\nu_B \le \nu_A$, l'intersection par $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A, \mu_B)$ et enfin $\nu_{A \cap B} = \max(\nu_A, \nu_B)$.

On montre que les propriétés de commutativité, associativité, idempotence, distributivités mutuelles et lois de Morgan sont conservées. Des opérateurs modaux peuvent être définis pour tout ensemble biflou A:

La nécessité $\square A$ par $\mu_A$ et $1 - \mu_A$ et la possibilité $\Diamond A$ par $1 - \nu_A$ et $\nu_A$ de sorte que : $\square A \subset A \subset \Diamond A$. Ce sont deux ensembles flous non biflous qui encadrent l'ensemble biflou A.

On peut alors montrer que ce sont des connecteurs idempotents duaux :

$\square A = \neg(\Diamond\neg A)$ et $\Diamond A = \neg(\square \neg A)$, établissant des morphismes :

$\square(A \cap B) = \square A \cap \square B$ et $\Diamond(A \cup B) = \Diamond A \cup \Diamond B$ et vérifiant la prédominance du nécessaire $\square\Diamond A = \Diamond\square A = \square A$.

En définissant la corrélation entre deux ensembles biflous par :

$c(A, B) = \sum (\mu_A\mu_B + \nu_A\nu_B)$ sur E supposé fini, on peut définir une «variance intuitioniste» var (A) = $\sum_{x \in E} (\mu_A{}^2(x) + \nu_A{}^2(x))$ alors, au cas où A est flou, on a bien sûr $\nu_A = 1 - \mu_A$ et alors var (A) = $\sum_{x \in E} e(\mu(x))$, avec $e(x) = 2x^2 - 2x + 1$ qui est notée l'acuité [O.Onicescu] c'est une «accentuation» valant 1 pour 0 ou 1 et 0 pour 0.5. On a les propriétés :

var (A) = var (¬A), et cov (A, B) = 0 $\Leftrightarrow$ [A, B sont des ensembles exacts], et enfin la «corrélation» cov (A, B) / $\sqrt{}$ (var(A).var(B)) est égale à 1 $\Leftrightarrow$ A = B

Une autre extension des ensembles flous a été faite avec les ensembles «ultra-flous» définis par une fonction d'appartenance dont les valeurs ne sont pas dans [0, 1] mais sont eux-même des sous ensembles flous de [0, 1], [Tong Tong 95].

LES ENSEMBLES BRUTS «ROUGH SETS»

L'idée de ne connaître un ensemble qu'imprécisément entre deux bornes ensemblistes est due à [Pawlak 82]. Dans un univers U, si R est une relation d'équivalence, on rappelle que la classe d'équivalence de x notée R(x) contient tous les y liés à x par R. Les classes d'équivalences forment une partition et on donne les définitions d'approximations basse et haute de X :

Si $X \subset U$ $R^-(X) = \{x \in U / R(x) \subset X\}$ et $R^+(X) = \{x \in U / R(x) \cap X \neq Ø\}$

L'ensemble grossier X n'est défini que par le couple $(R^-(X), R^+(X))$. Ce sont respectivement les ensembles d'éléments pouvant certainement (possiblement) être classés dans X. On verra l'analogie avec les probabilités basse et haute (chapitre 2) et avec la logique modale [Farinhas del Cerro, Orlowska 85].

On dit que X est R-définissable si X est l'union de classes d'équivalence. Dans ce cas $X = R^-(X) = R^+(X)$, on définit également deux autres relations d'appartenances faible et forte : $x \in^- X \Leftrightarrow x \in R^-(X)$ et $x \in^+ X \Leftrightarrow x \in R^+(X)$

En ce cas, son complémentaire noté $\neg X$ est aussi R-définissable.

Un indice d'imprécision dans [0, 1] est défini dans la cas fini par :

$$\rho_R(X) = 1 - \text{card}(R^-) / \text{card}(R^+).$$

Deux ensembles X, Y sont dits grossièrement égaux vis à vis de R, s'ils ont les mêmes approximations basse et haute. Cela définit une équivalence au sein des ensembles bruts.

Des applications ont été effectuées, en classification médicale (avoir un même attribut définit une relation d'équivalence, des exemples peuvent ainsi être groupés par classes d'équivalence et une observation correspond à un ensemble brut dont on détermine deux bornes, ce qui est certain et ce qui est possible) [Pawlak 90].

**Exercice 1.14**

Montrer les propriétés suivantes : $R^-(X) \subset X \subset R^+(X)$

$R^-(\neg X) = \neg R^+(X)$ $R^+(\neg X) = \neg R^-(X)$

$R^-(X \cap Y) = R^-(X) \cap R^-(Y)$ $R^+(X \cup Y) = R^+(X) \cup R^+(Y)$

$R^-(X) \cup R^-(Y) \subset R^-(X \cup Y)$ $R^+(X \cap Y) \subset R^+(X) \cap R^+(Y)$

$R^-(R^-(X)) = R^+(R^-(X)) = R^-(X)$ $R^+(R^+(X)) = R^-(R^+(X)) = R^+(X)$

$R^-$ et $R^+$ sont croissantes pour l'inclusion.

APPLICATION DES ENSEMBLES FLOUS À LA MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

On souhaite obtenir une image floue (des niveaux de gris) mais non bruitée à partie d'une image floue. Donnons en premier lieu les définitions élémentaires de la morphologie mathématique non floue [Schmitt, Mattioli 94] :

Etant donné un ensemble E dans $R^2$, et B un «élément structurant» qui peut être un voisinage fermé et connexe de 0, on peut considérer par exemple $B_0 = \{x / |x| \leq \varepsilon\}$ et $B_x = x + B_0$, le plus simple est de prendre la norme sup pour laquelle B est un carré dans le plan, on définit :

Dilatation de E par rapport à B : $\text{Dil}_B(E) = \{x / E \cap B_x \neq Ø\}$

Erosion de E : $\text{Ero}_B(E) = \{x / B_x \subset E\}$

Ces deux définitions correspondent à une sorte de vision discrète de l'adhérence et l'intérieur topologiques d'un ensemble. Ce sont d'ailleurs des notions duales car $Ero_B(E) = \neg Dil_B(\neg E)$ où «¬» désigne le complémentaire.
Ouverture de E : Dil (Ero (E)) qui donne de bons résultats en traitement d'images, le but étant de rectifier des formes et d'obtenir des images lissées où les bruits sont éliminés.
La fermeture est le contraire Cl(E) = Ero (Dil (E)), il est aussi possible de les enchaîner empiriquement jusqu'à un «lissage» satisfaisant.
On a toujours $Ouv(E) \subset E \subset Cl(E)$ et ces deux opérateurs sont idempotents; un filtre est une opération (Cl o Ouv) o (Cl o Ouv) o ....(E). Le «chapeau haut de forme» est l'ensemble E - Ouv(E), quant au squelette de E c'est l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales incluses dans E, on peut montrer que si B(r) désigne la boule ouverte de rayon r, c'est :

$$Sq(E) = \cup_{r \geq 0} \cap_{\varepsilon \geq 0} [Ero_{B(r)}(E) - Ouv_{B(\varepsilon)} Ero_{B(r)}(E)]$$

Ces définitions peuvent s'étendre au flou [Bloch, Maître 93], si E, maintenant flou, est caractérisé par sa fonction d'appartenance $\mu$, et $f$ est un élément structurant (une définition floue de voisinage) défini par exemple par $f(t) = \min(1, \max(0, 1 - t / a))$ (un cône) ou bien paraboliquement par $f(t) = 1 - t^2 / a^2$ où a est une distance à régler en fonction du problème (de l'ordre de 1 à 5 pixels).

On pose : $Dil_\mu(x) = \sup_{y \in E} \{T(\mu_E(y), f(d(x, y)))\}$

où T est une t-norme et S sa conorme associée (chapitre 3). Voir [Bloch, Maître 95] pour une étude comparatives suivant les t-normes et l'élément structurant et [Bloch, Pellot 96] pour une application à 3 dimensions.
De même, l'érosion est étendue au flou :

$$Ero_\mu(x) = \inf_{y \in E} \{S(\mu_E(y), 1 - f(d(x, y)))\}$$

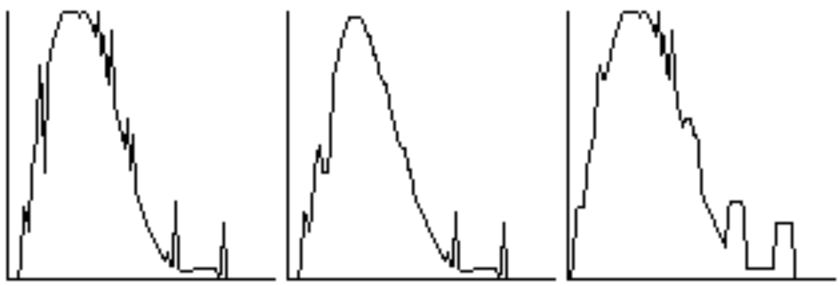

**Figure 1.8** Soit la fonction d'appartenance sur [0, 1] donnée dans [0, 1] par la troncature de $\mu(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) / 2 = \sin(3\pi x) / 3 - 0.4$ sur laquelle on a opéré une vingtaine de modifications aléatoires (première figure à gauche).
Pour l'élément structurant $f(t) = \min(1, \max(0, 1 - t / a))$ avec a = 0.05 on obtient successivement l'érosion au milieu et la dilatation à droite.

**Figure 1.9** Ouverture, fermeture et l'ouverture de l'ouverture sur le même exemple.

## 1.2 Relations floues

PRODUIT CARTÉSIEN ET RELATIONS FLOUES

Une relation floue n'est autre qu'un sous-ensemble flou d'un produit cartésien, elle est donc caractérisée par une fonction $E^2 \to [0,1]$.
Rappelons que le produit est défini par : $\mu_{A*B}(x, y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$
Si R est un ensemble flou de E*F (une relation floue) sa projection sur E est définie par $\mu_{\pi(R, E)} = \sup\{\mu_R(x, y) / y \in F\}$ il est clair que si $A = \pi(R, E)$ et $B = \pi(R, F)$, alors $\mu_R \leq \mu_{A*B}$.
Plus généralement si $X_1, X_2$, ... sont des ensembles ayant des parties floues $A_1, A_2, A_3$, ... on définit le produit cartésien flou $A = A_1*A_2*A_3*$... par la fonction d'appartenance $\mu_A(x_1, x_2, x_3,...) = \inf (\mu_{A1}(x_1), \mu_{A2}(x_2), ....)$, ceci peut être une première façon de définir une relation entre les $X_1, X_2$, ...
Prenons par exemple $X_1$ ={jaune, bleu} et $X_2$ = {rond, long}, on pose les ensembles flous :
$A_1$ = {j / 0.8, b / 0.2} et $A_2$ = {r / 0.4, l / 0.6} alors, le produit cartésien :
$A_1*A_2$ = {(j, r) / 0.4, (j, l) / 0.6, (b, r) / 0.2, (b, l) / 0.2} peut définir une relation floue entre la couleur et la forme dans laquelle «jaune» et «long» sont les attributs les plus liés.

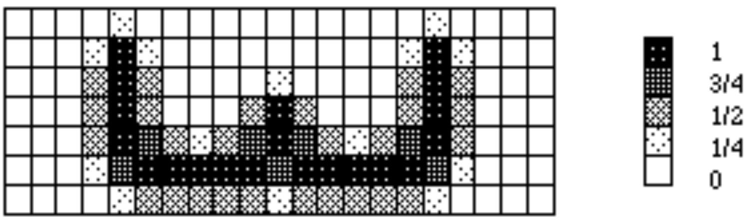


**Figure 1.15** Dans le cas discret, une relation binaire peut être définie par un simple schéma.

Exemple de relation binaire définie directement par une formule :

$$\mu_{<}(x, y) = 0 \text{ si } y - x \leq 2$$
$$= (y - x) / 2 - 1 \text{ si } 2 \leq y - x \leq 4$$
$$= 1 \text{ si } y - x \geq 4$$

C'est une définition trapézoïdale de «y plutôt supérieur à x».

**Exercice 1.16**

Montrer que la relation suivante est de noyau vide, quel est son support, sa hauteur ?

$$\mu_{<<}(x, y) = \text{si } y \leq x \text{ alors } 0 \text{ sinon } \frac{1}{1 + \frac{1}{(x - y)^2}}$$

C'est une définition continuement dérivable de «x très inférieur à y». En regardant la définition de la transitivité ci-dessous, montrer que « est transitive. Soit maintenant la relation binaire définie par la formule $\mu_{\approx}(x, y) = 1 / (1 + |x - y|)$ donnant une version de «approximativement égal».
Quel est son noyau et son support ?

## COMPOSITIONS DE RELATIONS FLOUES

Il existe plusieurs façons de définir la composition de deux relations floues, la plus employée est la définition «max-min» conforme au principe d'extension :

$\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_y (\min (\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)))$ elle est associative.

En particulier si A est une relation unaire et R est binaire on peut définir de la même façon : $\mu_{R \circ A}(v) = \max_u (\min (\mu_A(u), \mu_R(u, v)))$

Les définitions relatives aux relations binaires exactes peuvent se généraliser aisément au flou :

Symétrie : $\forall x \forall y \;\; \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$
Antisymétrie : $\forall x \forall y \;\; \mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$
Réflexivité : $\forall x \; \mu_R(x, x) = 1$
Antiréflexivité : $\forall x \; \mu_R(x, x) = 0$
Transitivité : $\forall x \forall y \forall z \;\; \mu_R(x, z) \geq \max_y (\min (\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$ soit :
$\mu_R \geq \mu_{R \circ R}$ ce qui permet parfois de vérifier plus rapidement la transitivité.

On peut montrer les propriétés suivantes :

R symétrique $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1]$ La $\alpha$-coupe de R est symétrique
R transitive $\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1]$ La $\alpha$-coupe de R est transitive

### FERMETURE TRANSITIVE D'UNE RELATION

C'est la relation $R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ (les exposants étant pris au sens de la composition).
L'algorithme de Floyd étendu à la construction de R* est le suivant :
Sur $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ le graphe de R* est initialisé par celui de R et représenté par la matrice formée par tous les degrés de R, c'est à dire la matrice des coefficients $(\mu_R(x_i, x_j))_{ij}$.

Pour k = 1 à n
  Pour i = 1 à n
    Pour j = 1 à n faire
    $R^*(x_i, x_j) \leftarrow \max(R^*(x_i, x_j), \min(R^*(x_i, x_k), R^*(x_k, x_j))$
(Attention à l'ordre des boucles)

**Exercice 1.17**
Y a-t-il transitivité pour la relation définie dans {a, b, c, d} ?

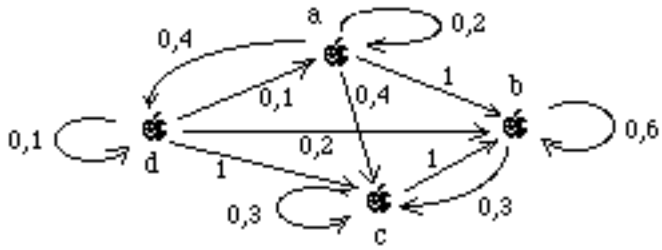


**Figure 1.11** Exemple de relation binaire floue pour un ensemble de 4 éléments.

**Exercice 1.18**
«x transmet facilement un message à y» est une relation définie par les données suivantes : $\mu(x_1, x_1) = 0.2$ $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_3, x_2) = 1$ $\mu(x_2, x_1) = \mu(x_3, x_1) = 0$ $\mu(x_2, x_2) = 0.6$ $\mu(x_2, x_3) = \mu(x_3, x_3) = 0.3$ $\mu(x_1, x_3) = 0.4$ faire le graphe et montrer que la relation est transitive.
Construire la matrice M de la relation, effectuer le produit matriciel M.M avec les opérations min et max et vérifier que $M \geq M^2$.

$$\text{Réponse :} \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.19**
Montrer que la relation $\mu_{\approx}(x, y) = \exp(-k^*(x-y)^2)$ est réflexive et symétrique mais non transitive, son support est $R^2$ et son noyau $\{y = x\}$.

## RESSEMBLANCES

Les relations $\mu_{\approx 1}(x, y) = \exp(-k^*(x-y)^2)$ et $\mu_{\approx 2}(x, y) = 1 / (1 + |x - y|)$ (d'analogie) vues plus haut sont réflexives et symétriques. Toute relation binaire réflexive et symétrique est dite relation de ressemblance.
On dit alors que $\mu(x, y)$ est le degré de ressemblance entre x et y.

## ORDRES FLOUS

Ce sont les relations floues réflexives, transitives et antisymétriques.
Par exemple $p(A > B) = \sup_{(x \geq y)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$, pour deux nombres flous triangulaires, est le complément de valeur maximale de $A \cap B$.

Exemple : $\mu(x, y) =$ si $y < x$ alors 0 sinon $\exp(-x)$, est une relation transitive dans les réels positifs $R^+$, exprimant que x est petit indépendamment de y.

**Exercice 1.20**
Montrer que la relation binaire R définie sur {a, b, c, d} par le tableau ci-dessous est un ordre total. En tracer le graphe.

| R ☞ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0.7 | 0.6 | 0.8 | 0.8 |
| b | 0 | 1 | 0 | 0.2 |
| c | 0 | 0.6 | 0 | 0.4 |
| d | 0 | 0 | 0 | 0.7 |

### SIMILARITÉ OU SIMILITUDE

La définition suivante élargit celle de relation d'équivalence exacte :

R est une relation binaire de similarité
$\Leftrightarrow$ R relation réflexive, symétrique et transitive
$\Leftrightarrow \forall\alpha \in [0, 1]$ la $\alpha$-coupe de R est une équivalence.

Si R est une relation de similarité ou la fermeture transitive d'une ressemblance, en posant :
$d(x, y) = 1- \mu_R(x, y)$ on peut vérifier que $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$ donc a fortiori l'inégalité triangulaire. Comme d est symétrique, pour que d définisse une distance (bornée), il suffit donc que $\mu_R(x, y) = 1$ n'ait lieu que pour x = y.

### CLASSE DE SIMILARITÉ

Pour x, la «classe» C(x) de x, est un ensemble flou défini par sa fonction d'appartenance $\mu_{Cx}(y) = \mu_R(x, y)$ et on peut remarquer que :

Si $\mu_R(x, y) = 1$ alors $C(x) = C(y)$
Si $\mu_R(x, y) = 0$ alors $C(x) \cap C(y) = \emptyset$

**Exercice 1.21**
Si R est réflexive, symétrique et $\mu_R(a, b) = 1$, $\mu_R(a, c) = \mu_R(b, c) = 0.8$, $\mu_R(d, e) = 0.6$, $\mu_R(a, d) = \mu(a, e) = \mu_R(b, d) = \mu_R(b, e) = \mu_R(c, d) = \mu_R(c, e) = 0.5$, les autres étant 0.2, établir les classes d'équivalence des coupes $R_1$, $R_{0.8}$, $R_{0.6}$, $R_{0.5}$ et $R_{0.2}$ placés en arbre.

**Exercice 1.22**
Montrer que la relation binaire réflexive et symétrique R définie sur {a, b, c, d} par $\mu(a, b) = \mu(b, c) = \mu(b, d) = 0.3$, $\mu(a, d) = \mu(c, d) = 0.5$ et $\mu(a, c) = 0.9$ est transitive.
Quelles sont les classes de similarité pour les coupes de R aux niveaux d'appartenance 1 puis 0.9, puis 0.5 puis 0.3 ?
Construire l'arbre de ces différentes partitions.

DISSIMILITUDE

Une dissimilitude est une relation contraire d'une similarité $\mu_R(x,y) = 1 - \mu_{\neg R}(x,y)$ où $\neg R$ est réflexive, symétrique et transitive, alors R est antiréflexive, symétrique et vérifie $\mu_R(x, z) \le \min_y (\max(\mu_R(x, y) , \mu_R(y, z)))$

**Exercice 1.23**
Pour quelles valeurs de k, la relation binaire suivante $\mu$ est-elle une dissimilitude ?

$$\mu(x, y) = 0 \text{ si } x = y$$
$$= 1-e^{-k*(y+1)} \text{ si } y < x$$
$$= 1-e^{-k*(x+1)} \text{ si } y > x$$

**Exercice 1.24**
Montrer que dans {A, B, C, D, E}, la première relation est une similitude, et la seconde, une dissimilitude.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0.8 | 0.7 | 1 | 0.9 |
| B | 0.8 | 1 | 0.7 | 0.8 | 0.8 |
| C | 0.7 | 0.7 | 1 | 0.7 | 0.7 |
| D | 1 | 0.8 | 0.7 | 1 | 0.9 |
| E | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.9 | 1 |

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0.2 | 0.3 | 0 | 0.1 |
| B | 0.2 | 0 | 0.3 | 0.2 | 0.2 |
| C | 0.3 | 0.3 | 0 | 0.3 | 0.3 |
| D | 0 | 0.2 | 0.3 | 0 | 0.1 |
| E | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0 |

PROJECTION ET EXTENSION D'UNE RELATION FLOUE

Si R est une relation binaire entre E et F, c'est-à-dire une partie floue de E*F, sa projection sur E est définie conformément au principe d'extension par $\mu_{\pi(R/E)}(x) = \sup \{\mu_R(x, y) / y \in F\}$.
L'extension (cylindrique) d'un ensemble flou A de E dans un ensemble produit E*F est la partie floue binaire $\mu_{ext(A)}(x, y) = \mu_A(x)$ de la sorte on a donc toujours proj(ext(A)) = A mais bien évidemment ext(proj(A)) est différent de A en général.

## 1.3. Prédicats vagues

FAMILLES DE PRÉDICATS

Un prédicat unaire issu d'une appréciation linguistique courante comme «jeune», «grand», ... est traditionnellement réalisé par un ensemble flou.
Une famille de prédicats est une famille de sous-ensembles flous d'un intervalle de R, censée traduire une hiérarchie comme très petit, petit, moyen, grand, très grand...
Elle est dite normale si chaque prédicat est normalisé (admet 1 pour sommet), elle est dite binaire si pour tout x il existe au plus deux prédicats tels que $\mu(x) \neq 0$, ainsi x pourra être à des degrés divers à la fois petit et moyen, mais ne pourra pas être en même temps trois qualificatifs. Plus généralement :

La famille (A, B, ...) de prédicats est $\alpha$-binaire
$\Leftrightarrow \forall x$ il existe au plus deux prédicats A, B tels que $\mu_A(x) > \alpha$ et $\mu_B(x) > \alpha$

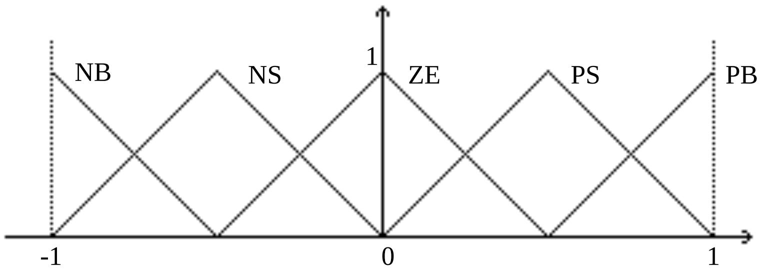


**Figure 1.12** Exemple de famille régulière couramment utilisée ramenée à [-1, 1] (NB = grand-négatif, NM = moyen-négatif, NS = petit-négatif, ZE = zéro, PS = petit-positif, moyen-positif, PB = grand-positif)

Il est en tous cas utile de se ramener à l'intervalle [-1, 1] car par des facteurs d'échelle, on peut toujours le faire, et on peut ramener l'étude de prédicats binaires à des prédicats unaires tels que ceux-ci.

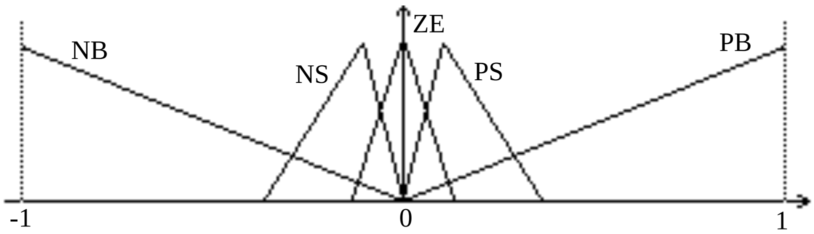


**Figure 1.13** Exemple de famille (utilisée dans le suivi d'une ligne) non binaire.

PARTITION FLOUE

Pour un ensemble E, on dit que les sous ensemble flous $(E_i)_{1 \le i \le n}$ de E constituent une partition floue si pour tout x, $\sum \mu_{Ei}(x) = 1$ [Bezdek 81](voir chapitre 5).

**Exercice 1.25**
Définir une famille de prédicats binaires avec des triangles non isocèles tels que la suite des écarts entre les sommets soit arithmétique.
Réponse, on peut prendre 2k + 1 prédicats avec $x_p = p(p + 1)/k(k + 1)$ pour $0 \le p \le k$.

MODIFICATEURS DE PRÉDICATS

Deux concepts sont à distinguer : une modification de degré de vérité dans «X est A» est très vrai, peu vrai ... et une modification de la relation «X est très A» etc ... Quoiqu'on peut parfois les confondre [Akdag, Pacholczyk 90], c'est de cette dernière dont il est question ici, par exemple une concentration avec $\mu_{trèsvrai}(x) = \mu^2(x)$ et une dilatation avec $\mu_{\pm vrai}(x) = \sqrt{\mu(x)}$.

**Exercice 1.26**

En prenant par exemple $\mu_{vieux}$ = si $x \le 40$ alors 0 sinon $1 / (1 + 25 / (x - 40)^2)$ [Zadeh 78], représenter ces deux transformations.

Si A est un prédicat défini par une fonction d'appartenance $\mu_A$, le prédicat mA s'en déduit [Bouchon-Meunier 88, 90] [Bouchon-Meunier, Yao 92] où t est une application de [0, 1] dans [0, 1] par $\mu_{mA} = t(\mu_A)$ avec :

Modification restrictive $\Leftrightarrow \mu_{mA} \le \mu_A$ (très, fortement, vraiment ...) c'est à dire un renforcement de A, par exemple en prenant $t(x) = x^2$

Modification expansive $\Leftrightarrow \mu_A \le \mu_{mA}$ (peu, plutôt, plus ou moins ...) c'est à dire un affaiblissement de A, par exemple $t(x) = \sqrt{x}$

Si t est linéaire on prendra en fait $t(\mu(x)) = \min(1, \max(0, a\mu(x) + b))$, trois exemples de modifications :

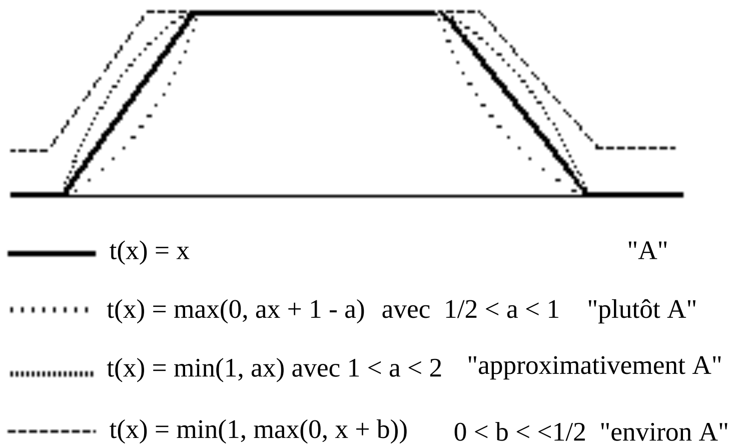


**Figure 1.14** Exemple de famille (utilisée dans le suivi d'une ligne) non binaire.

## QUANTIFICATEURS FLOUS

Mostowski en 1957 décrit pour la première fois cette notion. Les quantificateurs flous peuvent, le plus aisément, se définir de façon relative par un ensemble flou sur l'intervalle [0, 1]. Le quantificateur noté Q, associé à la fonction d'appartenance $\mu_Q$, sera utilisé dans la proposition Qx A(x) afin de lui donner la valeur de vérité $\mu_Q(\Sigma\mu_A(x) / \Sigma x)$.

### L'APPROCHE DES QUANTIFICATEURS FLOUS PAR DES INTERVALLES DE CONFIANCE

Plusieurs auteurs ont construit des systèmes de déduction fondés sur des appréciations linguistiques correspondant à des intervalles.

Ainsi pour [Dubois, Prade, Godo, Lopez de Mantaras 93] où des quantificateurs flous sont définis grâce à «Aucun» = 0, «Presque aucun» = ]0, a], «Peu» = [a, b], «Presque à moitié» = [b, 1 - b], «La plupart» = [1 - b, 1 - a], «Presque tous» = [1 - a, 1[, «Tous» = 1. On peut prendre a = 0,2 et b = 0,4.

Deux ordres partiels sont alors définis sur les intervalles avec [Aucun, Tous] comme minimum de l'orde spécifique et Tous comme maximum à la fois de l'ordre spécifique et de l'ordre de la certitude. Ce système a été appliqué au raisonnement qualitatif, ainsi il ne peut rien être conclu de : tous les A sont B, la plupart des B sont A, tous les C sont B, à peu près la moitié des B sont C.

EXEMPLES

Si 60 parmi 100 jetons sont de couleur verte (prédicat exact), et si «la plupart» est défini par un trapèze de support [0.5, 1] et de noyau [0.8, 1], «la plupart des jetons sont verts» obtiendra la valeur 1/3. A 70%, cette valeur serait 2/3, et à 80%, elle serait 1. Bien entendu, se pose le problème de la définition du quantificateur, devant traduire une expression linguistique particulièrement vague.

DÉFINITIONS DE QUANTIFICATEURS FLOUS

«Il existe au moins un» se traduit par la fonction $\mu_\exists$ nulle pour 0, et valant 1 partout ailleurs.
«Pour tous» est la fonction $\mu_\forall$ nulle sur [0, 1[, et valant 1 en 1.
Plus généralement la quantificateur exact p% peut être rendu par la fonction nulle sauf en p/100.
Le quantificateur de fonction constante 1 «n'importe quelle proportion» nommé «any».
Le quantificateur de fonction constante nulle peut être appelé «aucun».
Les quantificateurs «peu», «moitié», «most», (la plupart) et «beaucoup» sont définis à titre d'exemples par les trapèzes des figures ci-dessous.

COMBINAISON DE QUANTIFICATEURS FLOUS

[Ralescu, Bouchon-Meunier 95] définissent pour deux quantificateurs $Q_1$ et $Q_2$ la combinaison de $Q_1$ par $Q_2$ sur [0, 1] en convenant de 0/0 = 0 :

$$\mu_{Q2*Q1}(x) = \sup_{y \in [x, 1]} \min [\mu_{Q2}(x/y), \mu_{Q1}(y)]$$

Cette opération est illustrée par les figures :

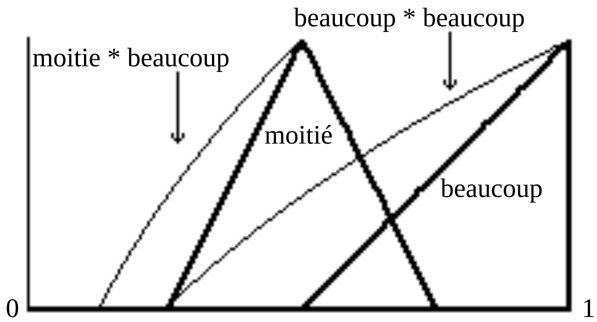


**Figure 1.15** Combinaisons de deux quantificateurs relatifs.

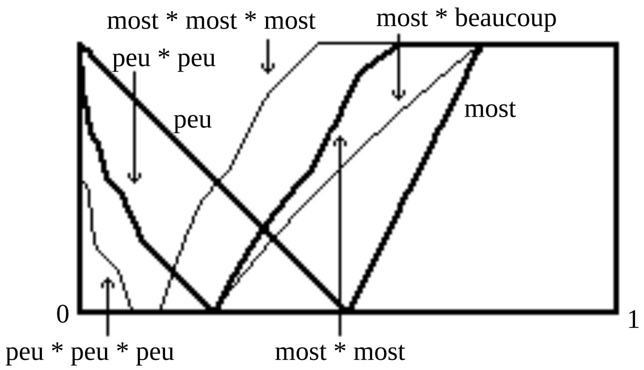


**Figure 1.16** Diverses combinaisons avec «peu», «most» et «beaucoup».

**Exercice 1.27**
Montrer que «any» est neutre à droite $\mu_{Q*any} = \mu_Q$, mais qu'au contraire $\mu_{any*Q}$ est la plus petite fonction décroissante supérieure à $\mu$, et que «tout» est neutre à gauche et à droite.
Montrer que «aucun» de fonction nulle, est absorbant à gauche et à droite :

$$\mu_{aucun*Q} = \mu_{Q*aucun} = \mu_{aucun}$$

Montrer que que $\mu_{p\%*Q}(x) = \mu_{Q*p\%}(x) = \mu_Q(100x/p)$.

**Exercice 1.28**
Montrer que la combinaison des quantificateurs est associative.

**Exercice 1.29**
Si Q est un quantificateur relatif défini par une fonction d'appartenance convexe, il est toujours possible de poser son alpha-coupe $Q_\alpha = [a_\alpha, b_\beta]$. Si $c \in [0, 1]$, on peut définir la contraction $Q^c$ de Q par la fonction d'appartenance

$$\mu_{Q^c}(x) = \text{si } x > c \text{ alors } 0 \text{ sinon } (x/c).$$

Montrer que $\inf(Q*Q')_\alpha = \inf(Q^{\inf(Q'\alpha)})_\alpha$ et $\sup(Q*Q')_\alpha = \sup(Q^{\sup(Q'\alpha)})_\alpha$.
Application, si Q est défini par un trapèze de support [a, d] et de noyau [b, c] et Q' de la même façon, alors le support de Q*Q' sera [aa', dd'] et son noyau [bb', cc'] et ses «pentes» seront des portions de paraboles d'axes parallèle à l'axe des abscisses.

## 1.4. Application aux requêtes floues dans une base de données

Le but de l'interrogation floue de base de données précises est tout à fait clair, on aimerait pouvoir demander par exemple la liste des articles vérifiant des critères vagues tels que un prix modéré, une bonne qualité ...
Il est évidemment beaucoup trop restrictif de demander les articles inférieurs à 100 F, car on risque d'écarter celui qui vaut 105 F mais qui serait très intéressant pour d'autres critères. On voit donc que les problèmes posés sont encore une fois la définition des prédicats tels que "cher», «grande taille», «bonne qualité» ... celle de quantificateurs vagues tels que «la plupart», «presque tous», «peu de»... et surtout la conduite à adopter pour l'agrégation des critères recherchés.

Si le premier problème est résolu par la définition de prédicats flous trapézoïdaux, le second peut également l'être par des ensemble flous dans [0, 1].

Le projet de P.Bosc d'étendre SQL aux requètes floues en un SQLf [Pivert 91], [Bosc, Pivert 95, 96], doit suivre un certain nombre de points, il doit en effet être le plus conforme possible au SQL qui est le plus répandu des langages d'interrogation de bases de données, et toutes les extensions proposées doivent avoir une sémantique qui correspond aux notions exactes de sélection, jointure, division relationnelle ...

#### REQUÈTE FONDAMENTALE

En SQL, la requête fondamentale est :

*select <objet> from <base relationnelle> where <condition>*

qui permet d'obtenir la liste des élément satisfaisant une condition plus ou moins structurée. La question peut être demandée suivant un classement (une partition) par

*select <objet> from <base> where <condition 1>*
*group by <objet> having <condition 2>*

La requête *select A from R where P* dans laquelle P est une proposition logique où $\neg$, $\wedge$, $\vee$ sont interprétés comme en logique floue, devra donc fournir un ensemble flou Q tel que : $\mu_Q(a) = \sup_{A(x) = a} \min(\mu_R(x), \mu_P(x))$

Exemple : au lieu d'une requète exacte telle que :

*select #emp from Emp where age < 35 and #dep in*
*(select #dep from Dep where budget > 100000*

pour obtenir les jeunes d'un ensemble d'employés dont le département a un budget élevé, on définira les ensembles flous 'jeune' et 'élevé' et la requète :

*select #emp from Emp*
*where age = 'jeune' and Emp.#dep = Dep.#dep and budget = 'élevé'*

donnera la fonction d'appartenance :

$\mu(e) = \min (\mu_{jeune}$ (e.age),
$\sup \{\min (\mu_{élevé}$ (budget), $(\mu_{=}$ (d.#dep, e.#dep) / d $\in$ Dep$\}$

#### SÉLECTION

Si R est une relation unaire sur X et $\phi$ une fonction booléenne définie sur X (c'est à dire la même chose que la définition d'un prédicat unaire), on définit avec «deux points» R : $\phi = \{x / R(x)$ et $\phi(x)\}$ qui s'élargit par la définition $\mu_R : \phi = \min (\mu_R, \phi)$ naturellement au flou.

#### PROJECTION

Si R est une relation binaire entre les ensembles X et Y, on pose (mieux notée par $R_{/A}$ mais conforme à celle donnée plus haut) $R[A] = \{x \in A / \exists y\ xRy\}$ donc $\mu_{R[A]}(x) = \sup\{\mu_R(x, y) / y \in Y\}$ est la restriction à A du domaine de R.

JOINTURE

Pour deux relations unaires P et Q respectivement sur R et S, deux autres relations unaires (les attributs) A et B respectivement sur R et S, et un opérateur $\theta$ (la conjonction * par exemple), on définit la jointure :
P [A $\theta$ B] Q = {(x, y) / P(x) et Q(y) et (A(x) $\theta$ B(y))}.
Cette opération est facilement étendue au flou par :

$$\mu_{P\,[A\,\theta\,B]\,Q}(x, y) = \min(\mu_P(x), \mu_Q(y), (\mu_A(x)\ \theta\ \mu_B(y)))$$

Exemple, en prenant la notation informatique x.A pour la valeur de l'attribut A sur l'objet x, si $\theta$ est un opérateur :

*select R.A, S.B from R, S where P(R) and Q(S) and R.C θ S.D*

va délivrer une relation floue telle que :

$$\mu(a, b) = \sup\{\min(\mu_P(x), \mu_Q(y), \mu_\theta(x.C, y.D)) \;/\; x \in R \text{ et } y \in S \text{ et } x.A = a \text{ et } y.B = b\}$$

EXTENSION DU «IN» :

«a est dans E» peut être étendu par «a est voisin d'un élément de E» avec :

$$\mu_{inf}(a, E) = \sup\{\min(\mu_{\approx}(a, b), \mu_E(b)) \;/\; b \in \mathrm{supp}(E)\}$$

On tombe alors dans le problème du choix de l'approximation, on peut proposer par exemple, pour des valeurs positives non nulles :
$\mu_{\approx}(x, y) = \min(x, y) / \max(x, y)$, ce qui permet d'avoir les couples proportionnels au même niveau.
Exemple : *select #emp from Emp where age < 35 and #dep inf*
*(select #dep from Dep where budget > 100000*
pour obtenir les jeunes d'un ensemble d'employés dont le département a un budget élevé.
$in_f$ est choisi de façon à avoir l'équivalence entre
*select R.* from R, S where P(R) and Q(S) and e.A ≈ e.B*
et la question *select * from R where P and A inf (select B from S where Q)*

GENERALISATION DU «COUNT» DE SQL

On prend naturellement $\mathrm{count}(E) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(E)} \mu_E(x)$

GENERALISATION DU «EXISTS» DE SQL

On pourra définir $\mu_{exists}(E) = \sup\{\mu_E(x) \;/\; x \in \mathrm{supp}(E)\}$ si E est un ensemble flou normalisé.
Exemple : *select * from R where A $in_f$ (select B from S)*
et : *select * from R where exists (select * from S where B ≈ R.A)*
vont tous deux produire l'ensemble flou de R défini par :

$$\mu(x) = \sup\{\mu_{\approx}(x.A, y.B) \;/\; y \in S\}$$

PREDICATS GENERALISES

En SQL, «a < all E» signifie «a inférieur à tous les éléments de E, et «a = any E» signifie a est égal à au moins un élément de E. Ces relations peuvent s'étendre à une relation binaire floue θ et un ensemble flou E, de la façon suivante :

$$\mu_{\theta\ any}(a, E) = \sup \{\min (\mu_E(x), \mu_\theta(a, x)) / x \in supp(E)\}$$

$$\mu_{\theta\ all}(a, E) = \inf \{\max (1 - \mu_E(x), \mu_\theta(a, x)) / x \in supp(E)\}$$

Exemple : les employés dont le salaire est nettement supérieur à presque tous ceux des autres employés du même département, serait obtenu par la question :
*select * from Emp E where sal >> almost all (select sal from Emp where age = 'jeune' and #dep = E.#dep and #emp ≠ E.#emp)*

où $\mu_{almost}$ et $\mu_{>>}$ sont définis préalablement par l'utilisateur.
On a l'équivalence entre les questions

*select * from R where A θ all (select B from S where P)*

et : *select * from R where not exists (select B from S where P and not (A θ B)).*

LA DIVISION RELATIONNELLE

Une relation exacte dans une base de donnée, est un ensemble de n-uplets, soit par exemple une relation binaire R entre X et Y. Citons l'exemple donné dans [Bosc, Liétard 95] où R est la relation commerciale où une succursale est en relation avec un produit si et seulement elle dispose de ce produit. Soit une deuxième relation S entre Y et Z, par exemple la relation donnant simplement la description (ou le prix) des produits de Y.
Nous notons R ÷ S l'ensemble des éléments x de X qui sont en relation avec tous les y de Y pour lesquels S met un élément z de Z en relation, formellement :

$$x \in (R \div S) \quad \Leftrightarrow \forall y \forall z\ (y S z) \Rightarrow (x R y)$$

$$\Leftrightarrow \{y / \exists z\ (y, z) \in S\} \subset \{y / (x, y) \in R\}$$

Pour l'exemple donné, c'est donc simplement l'ensemble des succursales possédant tous les produits ayant une description.
Ce calcul de la division relationnelle est bien sûr long à évaluer, il faut donc si possible réduire la taille de la relation R. Cela se fait par exemple si on demande tous les magasins de Bretagne possédant tous les produits décrits, on évaluera l'expression (R : b) ÷ S plutôt que (R ÷ S) : b qui est identique mais plus complexe à évaluer.

DIVISION RELATIONNELLE IMPRECISE

On voudrait maintenant pouvoir avoir la liste des succursales ayant un chiffre d'affaire «important» et distribuant «presque tous» les articles de «bonne qualité».
La généralisation à des relations floues peut se faire en traduisant naturellement les relations par des relations floues. On peut donner une interprétation plus probabiliste que possibiliste, en disant que $\mu_R(x, y) = 0.5$ signifie la plus grande incertitude quant au lien entre x et y.
La généralisation de la division relationnelle passe évidemment par la définition d'un degré d'inclusion entre sous-ensembles flous, soit celle d'une implication (chapitre 3)

$$\mu_{R \div S}(x) = \inf \{\mu_S(y, z) \rightarrow \mu_R(x, y) / y \in Y, z \in Z\}$$

En prenant l'implication de Kleene-Dienes $(x \rightarrow y) = \max(1 - x, y)$, on montre la cohérence de cette extension avec la division relationnelle exacte.

EXTENSION DE L'INCLUSION «$\text{contains}_f$» pouvant être défini par $\mu_{inc}(F, G) = \inf \max(1 - \mu_F, \mu_G)$ qui n'est autre que la traduction de l'implication de Kleene-Dienes (chapitre 3).
L'expression de la division relationnelle peut être faite avec imbrication de blocs par :

*select distinct X from R, R1 where (select A from R*
*where X = R1.X containsf (select B from S)*.

SEMANTIQUE DES QUANTIFICATEURS FLOUS

Des quantificateurs flous (relatifs) Q tels que «la plupart», «peu de», «au moins la moitié» peuvent être définis par des fonctions de [0, 1] dans [0, 1] de sorte que trouver les éléments x tels que «Qy vérifiant S sont R(x, y)» est interprété par l'ensemble flou :

$$\mu(x) = \sup \{\min (Q(h), \min \{\mu_S(u) \rightarrow \mu_R(x, u)\}) / C \subset \text{supp}(S)\}$$

On utilise l'implication de Kleene $(x \rightarrow y) = \max(1 - x, y)$, et h est la proportion d'éléments vérifiant S dans C (en rappelant que $\text{card}(A) = \sum \mu_A(u)$) :

$$h = \sum_{u \in C} \mu_S(u) / \sum \mu_S(u) = \text{card}(S \cap C) / \text{card}(S).$$

Exemple la question de trouver les départements dont la plupart des employés sont jeunes se fera par :

*select #dep from Emp group by #dep having most are age = 'jeune'*.

Une extension aux opérateurs OWA (chapitre 2) est même prévue afin de pouvoir demander par exemple «les éléments possédant au moins la moitié des critères possédés par a».