Arbres bien équilibrés

Recherche par dichotomie

on aimerait avoir des opérations de recherche, d'insertion et de suppression efficaces en moyenne et dans le pire des cas

tableau trié

- recherche en $O(\log n)$ par dichotomie

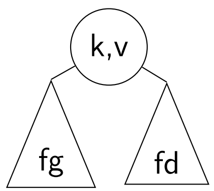
mais

- tri du tableau en $O(n \log n)$
- insertion et suppression coûteuses ($O(n)$, décalages)

Arbres binaires de recherche (ABR)

Structure de données pour exploiter la recherche par dichotomie

Arbre dont les nœuds contiennent des paires (clef, valeur), possédant au plus deux fils.

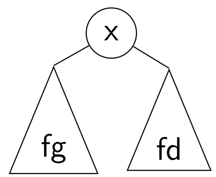


Invariant : pour un nœud

- les clefs dans le sous-arbre gauche fg sont toutes plus petites que k
- les clefs dans le sous-arbre droit fd sont toutes plus grandes que k
- fg et fd vérifie l'invariant

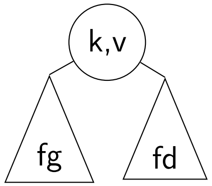
Preuve par induction

Pour montrer que P est vrai pour tout arbre binaire, il suffit de montrer que

- P est vrai pour l'arbre vide
- P est vrai pour  si on suppose que P est vrai pour fg et fd

Plus approprié qu'une récurrence sur la hauteur ou la taille de l'arbre

Recherche

rechercher k' dans 

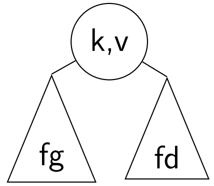
- si k' $=$ k, retourner v
- si k' $<$ k et fg est non-vide, rechercher k' dans fg
- si k' $>$ k et fd est non-vide, rechercher k' dans fd

Complexité : $O(h)$

- à chaque appel récursif, on diminue la hauteur de l'arbre d'au moins 1
- si la bonne clef se trouve au plus bas de l'arbre, il faudra h étapes, où h est la hauteur de l'arbre

Insertion

insérer k',v' dans l'arbre vide : retourner (k',v')

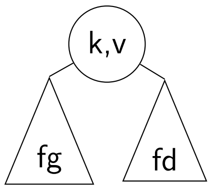
insérer k',v' dans 

- si k' $<$ k, insérer k',v' dans fg
- si k' $>$ k, insérer k',v' dans fd

Complexité : $O(h)$

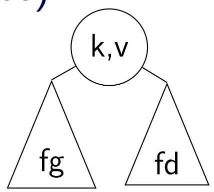
- à chaque appel récursif, on diminue la hauteur de l'arbre d'au moins 1
- on peut avoir à descendre jusqu'au nœud le plus bas

Suppression

Supprimer k dans 

- si fg vide, on retourne fd
- si fd vide, on retourne fg
- sinon,
  - on recherche l'association (k',v') avec la plus grande clef dans fg (celle la plus à droite)
  - on la met à la place de la racine
  - on supprime k' dans fg

Suppression (suite)

Supprimer k' dans  avec k $\neq$ k' :

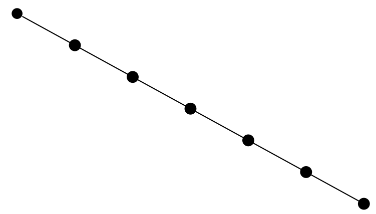
- si k' $<$ k, supprimer k' dans fg
- si k' $>$ k, supprimer k' dans fd

Complexité : $O(h)$

- si la clef à supprimer est dans le nœud le plus à droite, $O(h)$
- donc si la clef à supprimer est à la racine, recherche du plus à droite en $O(h)$ et suppression en $O(h) \Rightarrow O(h)$
- si la clef n'est pas à la racine, on fait un appel récursif sur un arbre de hauteur $h-1$ au maximum $\Rightarrow O(h)$

Complexité dans le pire des cas

La hauteur d'un arbre à n nœuds est n dans le pire des cas :



En particulier, on obtient un arbre de ce type si on insère les éléments par ordre croissant

La complexité dans le pire des cas est $O(n)$ pour rechercher, insérer et supprimer

Complexité en moyenne

La hauteur moyenne d'un arbre à n nœuds est $\sqrt{n}$

Toutefois, si on considère les arbres obtenus en insérant les éléments de $[0 \cdots n-1]$ suivant toutes les permutations possibles, la hauteur moyenne d'un arbre est $\log n$

La complexité en moyenne est donc $O(\log n)$ pour rechercher, insérer et supprimer

Implémentation (OCaml)

```
type ('k,'v) dict =
    Nil
  | Bin of ('k,'v) dict * ('k * 'v) * ('k,'v) dict

let creer _ = Nil

let rec rechercher d k =
  match d with
     Nil -> raise Not_found
  | Bin(_, (k',v), _) when k = k' -> v
  | Bin(fg,(k',_), _) when k < k' -> rechercher fg k
  | Bin(_, (k',_),fd)  -> rechercher fd k
```


Implémentation (OCaml, suite)

```
let rec inserer d k v =
  match d with
      Nil -> Bin(Nil,(k,v),Nil)
    | Bin(_, (k', _), _) when k = k' ->
        failwith "cas non traité"
    | Bin(fg,(k',v'),fd) when k < k' ->
        Bin(inserer fg k v,(k',v'),fd)
    | Bin(fg,(k',v'),fd) ->
        Bin(fg,(k',v'),inserer fd k v)
```

Correction (OCaml)

`rechercher(inserer(d,k,v),k) = v` :
Pour pouvoir continuer, il faut connaître la forme de `d`
On procède par induction sur `d`

- `d = Nil` : alors `inserer d k v = Bin(Nil,(k,v),Nil)`
  `rechercher (Bin(Nil,(k,v),Nil)) k = v` CQFD

- `d = Bin(fg, k',fd)`
  Par hypothèse d'induction,
  `rechercher(inserer(fg,k,v),k) = v` et
  `rechercher(inserer(fd,k,v),k) = v`
  - si $k < k'$,
    `inserer d k v = Bin(inserer fg k v, k', fd)`
    `rechercher (Bin(inserer fg k v, k', fd)) =`
    `rechercher fg k v`
  - si $k > k'$, symétrique
  - $k \neq k'$ par hypothèse

Implémentation (C)

```
struct dict_base { key key;
                   value val;
                   dict fg;
                   dict fd; };

dict creer(int size) { return NULL; }

dict bin(dict fg, key k, value v, dict fd) {
  dict p = malloc(sizeof(dict_base));
  p->key = k;      p->val = v;
  p->fg = fg;      p->fd = fd;
  return p;
}
```


Implémentation (C, suite)

```
value rechercher(dict d, key k) {
  while(d != NULL) {
    if (d->key == k) return d->val;
    if (d->key > k) d = d->fg;
    else d = d->fd;   };
  return NULL;
}
```

Implémentation (C, version destructive)

```
dict inserer(dict d, key k, value v) {
  if (!d) return bin(NULL,k,v,NULL);
  if (d->key > k)
       d->fg = inserer(d->fg, k, v);
  if (d->key < k)
       d->fd = inserer(d->fd, k, v);
  return d;
}
```


Implémentation (C, version non destructive)

```
dict inserer(dict d, key k, value v) {
  dict res;
  if (!d) res = bin(NULL,k,v,NULL);
  else {
    if (d->key > k)
       res = bin(inserer(d->fg, k, v),
                 d->key, d->val, d->fd);
    if (d->key < k)
       res = bin(d->fd, d->key, d->val,
                 inserer(d->fg, k, v));
  };
  return res;
}
```


Arbres bien équilibrés

Pour rendre les ABR efficaces, il faut minimiser la hauteur par rapport au nombre de nœuds

Définition
Un arbre est bien équilibré si :

- *la différence de hauteur entre ses deux sous-arbres est d'au plus 1*
- *chacun de ses sous-arbres est bien équilibré*

Hauteur d'un arbre bien équilibré

Théorème
Pour un arbre bien équilibré à n nœuds et de hauteur h

$$\log_2(1+n) \leq h \leq \alpha \log_2(2+n)$$

avec $\alpha = \frac{1}{\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} < 1,44$

Par conséquent, rechercher, insérer et supprimer sont en $O(\log n)$ dans les arbres bien équilibrés

Arbres auto-équilibrants

Problème : l'insertion et la suppression peuvent déséquilibrer un arbre bien équilibré

- Modifier les fonctions d'insertion et de suppression pour garantir un invariant de bon équilibre

Arbres AVL (Adelson-Velskii et Landis, 1962) : rééquilibrage par rotations

Encapsulation

On veut ne manipuler que des arbres bien équilibrés

- Il faut interdire la création d'arbres non équilibrés à l'extérieur du module

On utilise l'encapsulation liée à la modularité : la seule façon de construire des AVL sera via le constructeur intelligent `bal`

Intérêt : dans `bal` on peut supposer que les arguments sont bien équilibrés, puisqu'ils proviennent des appels aux constructeurs intelligents

Types privés en OCaml

```
type t = private A of u | B of v
```

On ne peut utiliser les constructeurs `A` et `B` qu'à l'intérieur du module
Toujours possible de filtrer `A` et `B` en dehors du module

Intérêt : on définit des constructeurs intelligents

```
let a (x : u) = let x' = ... in A x'

let b (y : v) = let y' = ... in B y'
```

En dehors du module, obligé de passer par les constructeurs intelligents pour faire un `t`
Toutefois, on peut toujours discriminer les objets de type `t`

Complexité

Après une insertion, une seule rotation (éventuellement double) est nécessaire

Après une suppression, la rotation à effectuer peut entraîner un déséquilibre au-dessus, il y a donc au plus h rotations à effectuer

Comme les rotations sont effectuées en temps constant, les opérations pour rééquilibrer l'arbre sont en $O(\log n)$

Par conséquent, dans un arbre AVL, la recherche, l'insertion et la suppression sont en $O(\log n)$, y compris dans le pire des cas