Cours de logique

Julien Forest
julien.forest@ensiie.fr

Fonctionnement du cours

Règles de vie :

- pas d'ordinateur portable dans l'amphithéâtre ou en TD,
- ne pas hésiter à poser des questions (en cours, en TD,...),
- arriver à l'heure,
- pas de reprise du cours en TD.

Règles d'examens :

- Première session : Examen écrit
- Deuxième session : Examen écrit

Plan rapide du cours

Trois grandes parties :

I- Ensembles inductifs, ordre bien fondé, preuves par induction ;

II- La logique propositionnelle :
syntaxe, sémantique, validité, prouvabilité ;

III- La logique du premier ordre :
syntaxe, sémantique, validité, prouvabilité.

Pourquoi faire de la logique ?

Pour vous occuper/embêter pendant 22h30

Pourquoi faire de la logique ?

Pour vous occuper/embêter pendant 22h30

Parce que c'est vraiment utile :

Pourquoi faire de la logique ?

Pour vous occuper/embêter pendant 22h30

Parce que c'est vraiment utile :

- Nombreuses applications critiques (sécurité, sûreté,. . .).
- Énormément d'argent en jeu (milliards d'euros).
- Pas d'ambiguïté

Pourquoi faire de la logique ?

Pour vous occuper/embêter pendant 22h30

Parce que c'est vraiment utile :

- Nombreuses applications critiques (sécurité, sûreté,. . .).
- Énormément d'argent en jeu (milliards d'euros).
- Pas d'ambiguïté

Et que . . .

- Ordinateur = logique (cf. cours d'architecture)
- Programme : nécessité de prouver des propriétés = logique
- Base de données : vérification de propriétés = logique,
- . . .

I- Ensembles inductifs et preuves par induction

Induction ?

- Définition formelle d'ensembles, de fonctions, de propriétés

- Démonstration de propriétés

Induction ?

- Définition formelle d'ensembles, de fonctions, de propriétés :
  entiers, addition, parité : tous définis de manières inductives

- Démonstration de propriétés :
  "Tout entier est soit pair soit impair" : démonstration par induction

- Déjà utilisé pour les entiers (récurrence)

Ensembles inductifs (1)

Définition 1 (Ensembles définis inductivement)

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de base et $\mathcal{K}$ un ensemble d'opérations.
*L'**ensemble inductif** $< \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ est le plus petit ensemble E tel que :*

(B) $\mathcal{B} \subset E$

(I) *Si $f \in \mathcal{K}$ est d'arité n_f et si $x_1, \ldots, x_{n_f} \in E$ alors $f(x_1, \ldots, x_{n_f}) \in E$*

Ensembles inductifs (1)

Définition 1 (Ensembles définis inductivement)

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de base et $\mathcal{K}$ un ensemble d'opérations.
L'ensemble inductif $< \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ est le plus petit ensemble E tel que :

(B) $\mathcal{B} \subset E$

(I) *Si $f \in \mathcal{K}$ est d'arité n_f et si $x_1, \ldots, x_{n_f} \in E$ alors $f(x_1, \ldots, x_{n_f}) \in E$*

Les entiers $\mathbb{N} = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$?

Ensembles inductifs (1)

Définition 1 (Ensembles définis inductivement)

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de base et $\mathcal{K}$ un ensemble d'opérations.
L'ensemble inductif $< \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ est le plus petit ensemble E tel que :

(B) $\mathcal{B} \subset E$

(I) *Si $f \in \mathcal{K}$ est d'arité n_f et si $x_1, \ldots, x_{n_f} \in E$ alors $f(x_1, \ldots, x_{n_f}) \in E$*

Les entiers $\mathbb{N} = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$? Oui : $\mathcal{B} = \{0\}$ et $\mathcal{K} = \{succ\}$

Ensembles inductifs (1)

Définition 1 (Ensembles définis inductivement)

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de base et $\mathcal{K}$ un ensemble d'opérations.
*L'**ensemble inductif** $< \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ est le plus petit ensemble E tel que :*

(B) $\mathcal{B} \subset E$

(I) *Si $f \in \mathcal{K}$ est d'arité n_f et si $x_1, \ldots, x_{n_f} \in E$ alors $f(x_1, \ldots, x_{n_f}) \in E$*

Les entiers $\mathbb{N} = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$? Oui : $\mathcal{B} = \{0\}$ et $\mathcal{K} = \{succ\}$

Les listes d'entiers *intlist* $= < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$?

Ensembles inductifs (1)

Définition 1 (Ensembles définis inductivement)

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de base et $\mathcal{K}$ un ensemble d'opérations.
L'ensemble inductif $< \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ est le plus petit ensemble E tel que :

(B) $\mathcal{B} \subset E$

(I) *Si $f \in \mathcal{K}$ est d'arité n_f et si $x_1, \ldots, x_{n_f} \in E$ alors $f(x_1, \ldots, x_{n_f}) \in E$*

Les entiers $\mathbb{N} = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$? Oui : $\mathcal{B} = \{0\}$ et $\mathcal{K} = \{succ\}$

Les listes d'entiers *intlist* $= < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$? Oui : $\mathcal{B} = \{nil\}$ et $\mathcal{K} = \{cons\}$

Ensembles inductifs (2)

Ensembles inductifs sous forme de règles d'inférences

$$\frac{\text{prémisses}}{\textit{conclusion}}$$

Ensembles inductifs (2)

Ensembles inductifs sous forme de règles d'inférences

$$\frac{\text{prémisses}}{\textit{conclusion}}$$

Une règle pour :

- chaque x de $\mathcal{B}$: $\qquad \dfrac{}{x}$
- chaque opération f de $\mathcal{K}$ d'arité n : $\qquad \dfrac{x_1 \ldots x_n}{f(x_1, \ldots, x_n)}$

Ensembles inductifs (2)

Ensembles inductifs sous forme de règles d'inférences

$$\frac{\text{prémisses}}{\textit{conclusion}}$$

Une règle pour :

- chaque x de $\mathcal{B}$: $\overline{x}$
- chaque opération f de $\mathcal{K}$ d'arité n : $\dfrac{x_1 \ldots x_n}{f(x_1, \ldots, x_n)}$

Exemple : $\overline{0} \quad \dfrac{n}{succ(n)}$

Ensembles inductifs (2)

Ensembles inductifs sous forme de règles d'inférences

$$\frac{\text{prémisses}}{\textit{conclusion}}$$

Une règle pour :

- chaque x de $\mathcal{B}$: $\quad \overline{x}$
- chaque opération f de $\mathcal{K}$ d'arité n : $\quad \dfrac{x_1 \dots x_n}{f(x_1, \dots, x_n)}$

Exemple : $\overline{0} \quad \dfrac{n}{succ(n)}$

Inférence : $\dfrac{\overline{0}}{succ(0)} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{0}}{succ(0)}}{succ(succ(0))}$

Ensemble inductifs (3)

Théorème 1

Soient E un ensemble et $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} > \subseteq E$, on a :

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \qquad \text{avec } \mathcal{F} = \{ Y \subseteq E \mid \mathcal{B} \subseteq Y \text{ et } Y \text{ stable par } \mathcal{K} \}$$

Démonstration par double inclusion.

Ensemble inductifs (3)

Théorème 1

Soient E un ensemble et $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} > \subseteq E$*, on a :*

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \qquad \textit{avec } \mathcal{F} = \{Y \subseteq E \mid \mathcal{B} \subseteq Y \textit{ et } Y \textit{ stable par } \mathcal{K}\}$$

Démonstration par double inclusion.

$\bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \subseteq X$: $X \in \mathcal{F}$, donc X contient $\bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$.

Ensemble inductifs (3)

Théorème 1

Soient E un ensemble et $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} > \subseteq E$, on a :

$$X = \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y \qquad \textit{avec } \mathcal{F} = \{Y \subseteq E \mid \mathcal{B} \subseteq Y \textit{ et } Y \textit{ stable par } \mathcal{K}\}$$

Démonstration par double inclusion.

$X \subseteq \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$: Par définition X est le plus petit ensemble tel que $\mathcal{B} \subseteq E$ et stable par $\mathcal{K}$. Tout élément de $\mathcal{F}$ contient X, et donc $\bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y$ contient X.

Principe d'induction structurelle

Théorème 2 (Induction structurelle)

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ un ensemble inductif.
Soit P une propriété sur les éléments de X telle que :

- *$P(x)$ est vérifiée sur tous les éléments x de $\mathcal{B}$*
- *Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ de X tels que $P(x_1)$,. . . ,$P(x_n)$ est vérifiée et tout $f \in \mathcal{K}$, on peut montrer que $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vérifiée*

La propriété P est vérifiée pour tous les éléments de X.

Principe d'induction structurelle

Théorème 2 (Induction structurelle)

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ *un ensemble inductif.*
Soit P *une propriété sur les éléments de* X *telle que :*

- $P(x)$ *est vérifiée sur tous les éléments* x *de* $\mathcal{B}$
- *Pour tous* $x_1, \ldots, x_n$ *de* X *tels que* $P(x_1), \ldots, P(x_n)$ *est vérifiée et tout* $f \in \mathcal{K}$*, on peut montrer que* $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ *est vérifiée*

La propriété P *est vérifiée pour tous les éléments de* X*.*

On pose $U = \{x \in X \mid P(x) \text{ est vérifiée}\}$ et on montre que $X = U$.

$X \subseteq U$: Par hypothèse $\mathcal{B} \subseteq U$ et U stable par $\mathcal{K}$ et donc $X \subseteq U$.

Principe d'induction structurelle

Théorème 2 (Induction structurelle)

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ un ensemble inductif.
Soit P une propriété sur les éléments de X telle que :

- *$P(x)$ est vérifiée sur tous les éléments x de $\mathcal{B}$*
- *Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ de X tels que $P(x_1)$,...,$P(x_n)$ est vérifiée et tout f $\in \mathcal{K}$, on peut montrer que $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vérifiée*

La propriété P est vérifiée pour tous les éléments de X.

On pose $U = \{x \in X \mid P(x) \text{ est vérifiée}\}$ et on montre que $X = U$.

$U \subseteq X$: Trivial.

Principe d'induction structurelle

Théorème 2 (Induction structurelle)

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ un ensemble inductif.
Soit P une propriété sur les éléments de X telle que :

- *$P(x)$ est vérifiée sur tous les éléments x de $\mathcal{B}$*
- *Pour tous $x_1, \ldots, x_n$ de X tels que $P(x_1)$,...,$P(x_n)$ est vérifiée et tout $f \in \mathcal{K}$, on peut montrer que $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vérifiée*

La propriété P est vérifiée pour tous les éléments de X.

Rq. : généralisation du principe de récurrence sur les entiers

Ensemble inductif (4)

Théorème 3

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ *et soit la suite* $X_0 = \mathcal{B}$, $X_{i+1} = X_i \cup \mathcal{K}(X_i)$, *on a :*

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Démonstration par double inclusion.

Ensemble inductif (4)

Théorème 3

Soit $X = <\mathcal{B}, \mathcal{K}>$ *et soit la suite* $X_0 = \mathcal{B}$*,* $X_{i+1} = X_i \cup \mathcal{K}(X_i)$*, on a :*

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Démonstration par double inclusion.

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \subseteq X$: par récurrence $X_i \subseteq X$.

- $X_0 = \mathcal{B} \subseteq X$
- Si $X_i \subseteq X$ alors $\mathcal{K}(X_i) \subseteq X$ et donc $X_{i+1} \subseteq X$.

Ensemble inductif (4)

Théorème 3

Soit $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$ *et soit la suite* $X_0 = \mathcal{B}$, $X_{i+1} = X_i \cup \mathcal{K}(X_i)$, *on a :*

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Démonstration par double inclusion.

$X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$:

Ensemble inductif (4)

Théorème 3

Soit $X = <\mathcal{B}, \mathcal{K}>$ *et soit la suite* $X_0 = \mathcal{B}$, $X_{i+1} = X_i \cup \mathcal{K}(X_i)$, *on a :*

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Démonstration par double inclusion.

$X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$: par induction structurelle sur X.

- $\mathcal{B} = X_0 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$
- Si $x_1, \ldots, x_n \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, il existe i_0 t.q. $x_1, \ldots, x_n \in X_{i_0}$ et donc si $f \in \mathcal{K}$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in X_{i_0+1} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$

Définitions inductives de fonctions

Définition 2

Si $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$, on peut définir une fonction ϕ sur X inductivement comme suit :

- *Pour chaque élément $x \in \mathcal{B}$, on donne une valeur $\phi(x)$*
- *Pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans X et $v_1(= \phi(x_1)), \ldots, v_n(= \phi(x_n))$ alors on définit $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n$.*

Définitions inductives de fonctions

Définition 2

Si $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$, on peut définir une fonction ϕ sur X inductivement comme suit :

- *Pour chaque élément $x \in \mathcal{B}$, on donne une valeur $\phi(x)$*
- *Pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans X et $v_1 (= \phi(x_1)), \ldots, v_n (= \phi(x_n))$ alors on définit $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exemple : Sur les entiers, on définit *double* inductivement par :

- $double(0) = 0$
- si $n \in \mathbb{N}$, $double(succ(n)) = succ(succ(double(n)))$

Définitions inductives de fonctions

Définition 2

Si $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$, on peut définir une fonction ϕ sur X inductivement comme suit :

- *Pour chaque élément $x \in \mathcal{B}$, on donne une valeur $\phi(x)$*
- *Pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans X et $v_1 (= \phi(x_1)), \ldots, v_n (= \phi(x_n))$ alors on définit $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exemple : Sur les entiers, on définit *double* inductivement par :

- $double(0) = 0$
- si $n \in \mathbb{N}$, $double(succ(n)) = succ(succ(double(n)))$

Propriété 1

Si $\overline{n}$ est la représentation d'un entier n alors pour tout n on a $double(\overline{n}) = \overline{(2 * n)}$

Définitions inductives de fonctions

Définition 2

Si $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$, on peut définir une fonction ϕ sur X inductivement comme suit :

- *Pour chaque élément $x \in \mathcal{B}$, on donne une valeur $\phi(x)$*
- *Pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans X et $v_1 (= \phi(x_1)), \ldots, v_n (= \phi(x_n))$ alors on définit $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exemple : Sur les entiers, on définit *double* inductivement par :

- $double(0) = 0$
- si $n \in \mathbb{N}$, $double(succ(n)) = succ(succ(double(n)))$

Propriété 1

Si $\overline{n}$ est la représentation d'un entier n alors pour tout n on a $double(\overline{n}) = \overline{(2 * n)}$

Par induction structurelle sur $\overline{n}$

Définitions inductives de fonctions

Définition 2

Si $X = < \mathcal{B}, \mathcal{K} >$, on peut définir une fonction ϕ sur X inductivement comme suit :

- *Pour chaque élément $x \in \mathcal{B}$, on donne une valeur $\phi(x)$*
- *Pour chaque fonction $f \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans X et $v_1(= \phi(x_1)), \ldots, v_n(= \phi(x_n))$ alors on définit $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ en fonction de $v_1, \ldots, v_n$.*

Exemple : Sur les entiers, on définit *plus* inductivement par :

- pour tout $m \in \mathbb{N}$, $plus(0, m) = m$
- si $n \in \mathbb{N}$, pour tout m, $plus(succ(n), m) = succ(plus(n, m))$

Ordres

Définition 3

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ sur E telle que :

- *pour tout $x, y, z \in E$, si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$*
- *pour tout x, $x \not< x$*

Ordres

Définition 3

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ sur E telle que :

- *pour tout $x, y, z \in E$, si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$*
- *pour tout x, $x \not< x$*

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

Ordres

Définition 3

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ sur E telle que :

- *pour tout $x, y, z \in E$, si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$*
- *pour tout x, $x \not< x$*

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{N}$ et $\leq$ ordre large usuel : ko

Ordres

Définition 3

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ sur E telle que :

- *pour tout $x, y, z \in E$, si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$*
- *pour tout x, $x \not< x$*

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{N}$ et $\leq$ ordre large usuel : ko

$E = \mathbb{Z}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

Ordres

Définition 3

Soit E un ensemble. Un ordre strict sur E est une relation binaire $<$ sur E telle que :

- *pour tout $x, y, z \in E$, si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$*
- *pour tout x, $x \not< x$*

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{N}$ et $\leq$ ordre large usuel : ko

$E = \mathbb{Z}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{Z}$ et $\leq$ ordre large usuel : ko

Ordres bien fondé

Définition 4

Soit E un ensemble. Un ordre strict $<$ sur E est dit bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, $x_{i+1} < x_i$.

Ordres bien fondé

Définition 4

Soit E un ensemble. Un ordre strict $<$ sur E est dit bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, $x_{i+1} < x_i$.

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

Ordres bien fondé

Définition 4

Soit E un ensemble. Un ordre strict $<$ sur E est dit bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, $x_{i+1} < x_i$.

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{Z}$ et $<$ ordre strict usuel : ko

Ordres bien fondé

Définition 4

Soit E un ensemble. Un ordre strict $<$ sur E est dit bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, $x_{i+1} < x_i$.

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{Z}$ et $<$ ordre strict usuel : ko

$E = \mathbb{R}^+$ et $<$ ordre strict usuel ?

Ordres bien fondé

Définition 4

Soit E un ensemble. Un ordre strict $<$ sur E est dit bien fondé lorsqu'il n'existe pas de suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, $x_{i+1} < x_i$.

$E = \mathbb{N}$ et $<$ ordre strict usuel : ok

$E = \mathbb{Z}$ et $<$ ordre strict usuel : ko

$E = \mathbb{R}^+$ et $<$ ordre strict usuel : ko

Induction bien fondée

Théorème 4 (Induction bien fondée)

Soient E un ensemble, $<$ un ordre bien fondé sur E, et P une propriété sur les éléments de E. Si pour tout $x \in E$, on peut montrer :

$$H_x = \text{“si } P(y) \text{ est vraie pour tous les élément } y \text{ tels que } y < x\text{, alors } P(x) \text{ est vraie”}$$

alors P est vraie sur tous les éléments de E.

Induction bien fondée

Théorème 4 (Induction bien fondée)

Soient E un ensemble, $<$ un ordre bien fondé sur E, et P une propriété sur les éléments de E. Si pour tout $x \in E$, on peut montrer :

$$H_x = \text{“si } P(y) \text{ est vraie pour tous les élément } y \text{ tels que } y < x, \text{ alors } P(x) \text{ est vraie”}$$

alors P est vraie sur tous les éléments de E.

Démonstration par contradiction :

Supposons qu'il existe un x_0 tel que $P(x_0)$ ne soit pas vraie. Alors on en déduit d'après H_{x_0} qu'il existe un x_1 tel que $x_1 < x_0$ et $P(x_1)$ soit fausse. On peut donc trouver un x_2 tel que $x_2 < x_1$ et $P(x_2)$ soit fausse ...
On a donc une suite infinie strictement décroissante en contradiction avec l'hypothèse que $<$ est bien fondé.

II- Algèbre de Boole.

Algèbre de Boole : Utilité

Un ensemble simple et utile :

- Deux éléments seulement
- Quelques opérations de bases bien comprises
- Donne un sens à la logique par la suite

Définitions

On considère l'ensemble $\mathbb{B} = \{1, 0\}$ muni des opérations suivantes :

$\dot{\wedge}$	a	b	a $\dot{\wedge}$ b
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

$\dot{\vee}$	a	b	a $\dot{\vee}$ b
	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

$\dot{\Rightarrow}$	a	b	a $\dot{\Rightarrow}$ b
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	0	1

$\dot{\neg}$	a	$\dot{\neg}$ a
	1	0
	0	1