Examen (05 juin 2013)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé.

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du vendredi 20 février 2014 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO_FIP`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Exercice 1 Logique propositionnelle : modélisation

Question 1 : Vous décidez d'acheter un billet de tombola. Le buraliste vous en présente cinq, de 1 à 5, et vous déclare :

1. Si 5 est perdant, 1 est gagnant.
2. Si 4 est perdant, 2 est gagnant.
3. Si 3 est perdant, 5 aussi.
4. Si 1 est gagnant, 2 aussi.
5. Si 3 est gagnant, 4 est perdant.

Question 2 : Modélisez le problème à l'aide de la logique propositionnelle.

Correction : On modélise les billet pas x_i si le billet i est gagnant.

1. $\neg x_5 \Rightarrow x_1$
2. $\neg x_4 \Rightarrow x_2$
3. $\neg x_3 \Rightarrow \neg x_5$
4. $x_1 \Rightarrow x_2$
5. $x_3 \Rightarrow \neg x_4$

Question 3 : Démontrez que votre choix doit se porter sur le billet 2 pour être sur de gagner par la méthode de votre choix.

Correction : La méthode est libre. Prenons par exemple, un raisonnement sémantique. On pose Γ l'ensemble des formules de la question 1. On cherche à montrer que $\Gamma \models x_2$.

Soit I une interprétation telle que $I \models \Gamma$. Montrons que $I \models x_2$. Deux cas sont possibles :

- Si $I \models x_3$, alors puisque $I \models x_3 \Rightarrow \neg x_4$, on sait que $I \models x_4$. Donc, puisque $I \models \neg x_4 \Rightarrow x2$, on sait que $I \models x_2$.
- Si $I \models \neg x_3$, alors puisque $I \models \neg x_3 \Rightarrow \neg x_5$, on sait que $I \models \neg x_5$. Donc, puisque $I \models \neg x_5 \Rightarrow x_1$, on sait que $I \models x_1$. On peut donc conclure puisque $I \models x_1 \Rightarrow x_2$.

Exercice 2 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants (où A, B et C sont des variables propositionnelles :

1. $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C$

2. $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$
3. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A) \vee B)$
5. $\vdash ((\neg A) \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B$ (assez difficile)

Correction :

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{\Gamma = ((A \wedge B) \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow C}\,\Rightarrow_i *3$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g}{\Gamma \vdash B \Rightarrow C}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,ax}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d}{\Gamma = (A \Rightarrow B \Rightarrow C), A \wedge B \vdash C}\,\Rightarrow_e}{\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)}\,\Rightarrow_i *2$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax}{\Gamma, A \vdash B}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash \neg B}\,ax}{\Gamma, A \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma = (A \Rightarrow B), \neg B \vdash \neg A}\,\neg_i}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B \Rightarrow \neg A}\,\Rightarrow_i *2$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, A \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{A \Rightarrow B, A \vdash A}\,ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow_e}{A \Rightarrow B, A \vdash \neg A \vee B}\,\vee_i^d \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A}\,ax}{A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg A \vee B}\,\vee_i^g}{A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B}\,t.e}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B}\,\Rightarrow_i$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\neg A) \vee B}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\,ax}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \bot}\,aff}{\Gamma, \neg A \vdash B}\,\bot_C \qquad \dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}\,ax}{\Gamma = ((\neg A) \vee B), A \vdash B}\,\vee_e}{\vdash ((\neg A) \vee B) \Rightarrow A \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i *2$$

Exercice 3 Logique du premier ordre : déduction naturelle

Soit le problème suivant :

1. Tout dragon fort peut souffler le feu.
2. Un dragon rusé a toujours des cornes.
3. Aucun dragon faible n'a de cornes.
4. Les touristes ne chassent pas de dragons soufflant du feu.

Question 1 : Formalisez ce problème en logique du premier ordre. Vous définirez le langage avec soin.
Correction :

1. $\forall x, F(x) \Rightarrow S(x)$
2. $\forall x, R(x) \Rightarrow C(x)$
3. $\forall x, \neg F(x) \Rightarrow \neg C(x)$
4. $\forall x \forall y, T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x, y)$

Question 2 : Montrez que les dragons rusés soufflent du feu. (assez difficile)
Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, F(y) \Rightarrow S(y)}\,x}{\Gamma, R(y) \vdash F(y) \Rightarrow S(y)}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, \neg F(y) \Rightarrow \neg C(y)}\,ax}{\Gamma, R(y) \vdash \neg F(y) \Rightarrow \neg C(y)}\,\forall_e}{\Gamma, R(y) \vdash C(y) \Rightarrow F(y)}\,contr \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash \forall y, R(y) \Rightarrow C(y)}\,ax}{\Gamma, R(y) \vdash R(y) \Rightarrow C(y)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma, R(y) \vdash R(y)}\,ax}{\Gamma, R(y) \vdash C(y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, R(y) \vdash F(y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, R(y) \vdash S(y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash R(y) \Rightarrow S(y)}\,\Rightarrow_i}{\Gamma \vdash \forall y, R(y) \Rightarrow S(y)}\,\forall_i
$$

Question 3 : Montrez que les dragons rusés ne sont pas chassés par les touristes.
Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash \forall x \forall y, T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x,y)}\,ax}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash T(x) \Rightarrow S(y) \Rightarrow \neg Ch(x,y)}\,\forall_e * 2 \quad \dfrac{}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash T(x)}\,ax}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash S(y) \Rightarrow \neg Ch(x,y)}\,\Rightarrow_e \quad \dfrac{\text{question précédente}}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash S(y)}}{\Gamma, T(x), R(y) \vdash \neg Ch(x,y)}\,\Rightarrow_e}{\Gamma \vdash T(x) \Rightarrow R(y) \Rightarrow \neg Ch(x,y)}\,\Rightarrow_i *2}{\Gamma \vdash \forall x \forall y, T(x) \Rightarrow R(y) \Rightarrow \neg Ch(x,y)}\,\forall_i * 2
$$

Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ ax2$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution