Examen (11 Mai 2016)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du vendredi 12 Mai 2017 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO_FIP`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Exercice 1 Induction

Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par :

(B) $(0, 0) \in D$,

(I) si $(n, m) \in D$ alors $(n + 1, n + m + 1) \in D$

Question 1 : Donner les 5 premiers éléments de D calculables par ces règles.

Correction : $(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 10) \ldots$

On définit l'ensemble $F = \{(n, \frac{n*(n+1)}{2}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Question 2 : Montrer que $D = F$

Correction :

Exercice 2 Logique propositionnelle : traduction

Question 1 : Donner des formules de la logique propositionnelle permettant d'exprimer les phrases suivantes :

- Si les oiseaux chantent, alors le soleil brille
- Si le soleil ne brille pas, les oiseaux ne chantent pas
- Si il fait beau, alors le soleil brille et les oiseaux chantent
- Puisque le ciel est nuageux, le soleil ne brille pas.

Exercice 3 Logique propositionnelle : démonstration

Montrez en utilisant les règles de la déduction naturelle que :

1. $\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
2. $\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg p) \vee q)$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \Rightarrow q, p \vdash p \Rightarrow q}\,ax \quad \dfrac{}{p \Rightarrow q, p \vdash p}\,ax}{p \Rightarrow q, p \vdash q}\,\Rightarrow_e}{p \Rightarrow q, p \vdash (\neg p) \vee q}\,\vee_i^d \quad \dfrac{\dfrac{}{p \Rightarrow q, \neg p \vdash (\neg p)}\,ax}{p \Rightarrow q, \neg p \vdash (\neg p) \vee q}\,\vee_i^g}{\dfrac{p \Rightarrow q \vdash (\neg p) \vee q}{\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg p) \vee q)}\,\Rightarrow_i}\,t.e$$

3. $\vdash ((\neg p) \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{}{((\neg p) \vee q)\,, p \vdash \neg p \vee q}\,ax \qquad \dfrac{}{((\neg p) \vee q)\,, p, \neg p \vdash q}\,\neg_g \qquad \dfrac{}{((\neg p) \vee q)\,, p, q \vdash q}\,ax}{\dfrac{((\neg p) \vee q)\,, p \vdash q}{\vdash ((\neg p) \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)}\,\Rightarrow_i *2}\,\vee_e$$

4. $\vdash ((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, p \vdash F}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{F, p \vdash p}\,ax}{F, p \vdash p \vee q}\,\vee_i^g}{F, p \vdash p \wedge q}\,\Rightarrow_e}{F, p \vdash q}\,\wedge_e^d}{F \vdash p \Rightarrow q}\,\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\vdots}{F \vdash p \Rightarrow q}\,\Rightarrow_i}{\underbrace{(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)}_{F} \vdash ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))}\,\wedge_i}{\vdash ((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))}\,\Rightarrow_i$$

5. $\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))$

   Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash p \vee q}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, p \vdash p}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, p \vdash F}\,ax}{\Gamma, p \vdash p \Rightarrow q}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{}{\Gamma, p \vdash p}\,ax}{\Gamma, p \vdash q}\,\Rightarrow_e}{\Gamma, p \vdash p \wedge q}\,\wedge_i \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, q \vdash p \wedge q}\,\wedge_i}{\underbrace{\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}_{F}, p \vee q}_{\Gamma} \vdash p \wedge q}\,\vee_e}{\vdash ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q))}\,\Rightarrow_i$$

Exercice 4 Logique des prédicats

Démontrer la validité de la formule suivante par un raisonnement sémantique puis en utilisant la déduction naturelle.

$([\forall x A(x)] \wedge [\forall x B(x)]) \Rightarrow (\forall x [A(x) \wedge B(x)])$

Correction :

RÈGLES DE LA DÉDUCTION NATURELLE

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma,\ \text{ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (ax2)$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash B}\ (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\ (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A}\ (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B}\ \exists_g$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma}\ A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution