ensIIE — 2025-2026
FISA 1A — UE Modélisation Mathématique

Travaux pratiques – Interpolation polynomiale

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche à approcher f par un polynôme, donc plus simple à manipuler.

Exercice 1. (*Polynômes de Lagrange*) Soit $n \geq 0$ et $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de points tels que $x_i \neq x_j$ pour tous $0 \leq i \neq j \leq n$. On va construire un polynôme L de degré au plus n et tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

1. Pour $0 \leq i \leq n$, on définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$l_i(x) := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \times \cdots \times \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \times \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \times \cdots \times \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

   Pour $0 \leq i \leq n$, quelle est la valeur de $l_i(x_i)$? Si $j \neq i$, quelle est la valeur de $l_i(x_j)$? l_i est appelé le $i$ème polynôme de Lagrange associé aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.
2. Considérer $n = 2$ et les points $(x_0 = -1, y_0 = 2)$, $(x_1 = 1, y_1 = 3)$ et $(x_2 = 2, y_2 = -1)$. Calculer les trois polynômes de Lagrange l_0, l_1 et l_2 associés à la famille $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$. En déduire un polynôme L tel que $L(x_i) = y_i$ pour $0 \leq i \leq 2$.
3. Plus généralement, soit $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de points telle que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$. En utilisant les polynômes de Lagrange associés aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, donner un polynôme L de degré au plus n tel que $L(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
4. Définir une fonction SAGE *l* prenant en arguments une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, telle que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$, et un entier i entre 0 et n, et retournant le $i$ème polynôme de Lagrange associé aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.
5. Définir une fonction SAGE *L* prenant en arguments une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, telle que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$ et une famille $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$, et retournant le polynôme L associé.
6. Définir une fonction SAGE *plotLagrangePoints* prenant en argument une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, telle que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$, une famille $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$, et retournant un graphique affichant le nuage de points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ ainsi que le graphe du polynôme L associé à cette famille de points. On vérifiera en particulier que $L(x_i) = y_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
7. Définir une fonction SAGE *plotLagrangeFonction* prenant en argument une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, telle que $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$, une fonction f, et retournant un graphique affichant les graphes de la fonction f et de la fonction L associée à la famille de points $(x_i, f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$.
8. Vérifier les résultats obtenus à la question 2 avec les fonctions implémentées précédemment. Afficher le nuage de points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et le graphe du polynôme L.

Exercice 2. (*Phénomène de Runge*)

1. Définir une fonction SAGE *LagrangeUniforme* prenant en arguments deux réels $a < b$, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et un entier $n \geq 0$, et retournant le polynôme L associé aux points $(x_i, f(x_i))_{0 \leq i \leq n}$, où pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$x_i = a + ih_n, \quad h_n = \frac{b - a}{n}.$$

   Si $n = 0$, on posera $x_0 = a$ (et $h_0 = 0$).
2. Définir une fonction SAGE *ErreurUniforme* prenant en arguments deux réels $a < b$, deux fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et un entier $n \geq 0$, et retournant le nombre

$$\max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i) - g(x_i)|,$$

   où les x_i, $0 \leq i \leq n$, sont définis dans la question précédente.

3. Définir une fonction SAGE *plotLagrangeUniforme* prenant en argument deux réels $a < b$, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et un entier $n \geq 1$, et retournant un graphique affichant les graphes de la fonction f et de la fonction L associée à la famille de points $(x_i, f(x_i))_{0 \leq i \leq m}$ pour tout $0 \leq m \leq n$.
4. Pour $0 \leq n \leq 100$, calculer $e_n := \mathit{ErreurUniforme}(0, 1, f, \mathit{LagrangeUniforme}(0, 1, f, n), 1000)$ pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. Afficher le nuage de points $(n, e_n)_{1 \leq n \leq 100}$ et le nuage de points $(\log(n), \log(e_n))_{1 \leq n \leq 100}$. Qu'en déduisez-vous ?
5. Même question pour $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1, 1]$. Qu'observez-vous maintenant ?

Exercice 3. (*Polynômes de Tchebychev*) Pour tout $n \geq 1$, on définit les polynômes de Tchebychev par la relation de récurrence suivante

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1.$$

1. Calculer les 5 premiers polynômes de Tchebychev.
2. Définir une fonction SAGE *T* prenant en arguments $n \geq 1$ et un réel x, et retournant la valeur du $n$ème polynôme de Tchebychev $T_n(x)$.
3. Définir une fonction SAGE *plotT* prenant en argument $n \geq 1$ et retournant le graphique affichant sur $[-1, 1]$ les graphes de T_m pour $1 \leq m \leq n$.
4. Définir une fonction SAGE *racinesT* prenant en argument $n \geq 1$ et retournant les n racines de T_n.
5. Définir des fonctions SAGE *LagrangeTchebychev*, et *plotLagrangeTchebychev* similaires aux fonctions *LagrangeUniforme* et *plotLagrangeUniforme*, prenant pour points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ les racines de T_{n+1}. Pour ces fonctions, on pourra se passer des arguments $a < b$ car on ne voudra que considérer des fonctions $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.
6. Pour $1 \leq n \leq 100$, calculer $e_n := \mathit{ErreurTchebychev}(f, \mathit{LagrangeTchebychev}(f, n), 1000)$ pour $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1, 1]$. Afficher le nuage de points $(n, e_n)_{1 \leq n \leq 100}$ et le nuage de points $(\log(n), \log(e_n))_{1 \leq n \leq 100}$. Qu'observez-vous ? Comparer avec le résultat de la question 5 de l'exercice 2.

Exercice 4. (*Intégration numérique*)

1. Définir une fonction SAGE *IntegraleLagrangeUniforme* prenant en argument deux réels $a < b$, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et un entier $n \geq 0$, et retournant

   $$\int_a^b L(x)dx,$$

   où L est le polynôme de Lagrange obtenu dans la question 1 de l'exercice 2, c'est-à-dire utilisant une partition uniforme de $[a, b]$ avec $n + 1$ points.
2. Définir une fonction SAGE *IntegraleLagrangeTchebychev* similaire, retournant la même quantité mais où L est le polynôme de Lagrange obtenu dans la question 5 de l'exercice 3, c'est à dire utilisant les racines de T_{n+1}. On se restreindra aux fonctions $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ (la fonction *IntegraleLagrangeTchebychev* ne prendra alors en argument que la fonction f et l'entier $n \geq 0$).
3. Définir une fonction SAGE *IntegraleLagrangeUniformeCompose* prenant en argument deux réels $a < b$, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une famille de points $(z_i)_{0 \leq i \leq m}$ croissante et telle que $z_0 = a$ et $z_m = b$, et un entier $n \geq 1$, et retournant

   $$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} L_i(x)dx,$$

   où L_i est le polynôme de Lagrange de $f : [z_i, z_{i+1}] \to \mathbb{R}$ obtenu dans la question 1 de l'exercice 2, c'est-à-dire utilisant une partition uniforme de $[z_i, z_{i+1}]$ avec $n + 1$ points.
4. Définir une fonction SAGE *plotIntegraleLagrangeUniformeCompose* prenant en argument deux réels $a < b$, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une famille de points $(z_i)_{0 \leq i \leq m}$ croissante et telle que $z_0 = a$ et $z_m = b$, ett un entier $n \geq 1$, et retournant un graphique comportant le graphe de f ainsi que le graphe de la fonction dont on calcule l'intégrale par la méthode précédente, c'est-à-dire $g(x) = L_i(x)$ si $x \in [z_i, z_{i+1}[$.

5. Pour $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ définie sur $[-1, 1]$, discuter les résultats obtenus avec *IntegraleLagrangeUniforme* avec n grand d'une part, et avec *IntegraleLagrangeUniformeCompose* avec n petit, $z_i = a + i\frac{b-a}{m}$ et m grand.