

Travaux pratiques – Monte-Carlo et autres

Exercice 1. (*Méthode de Monte-Carlo*) Le but est de calculer une approximation de π . Pour ce faire, le but est de créer N points, notés (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq N$, aléatoirement et uniformément dans le carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. On comptera le nombre A de points étant dans le quart de cercle (dans le quart de plan $x, y \geq 0$) de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Si N est assez grand, par la loi des grands nombres, alors $\frac{A}{N}$ est proche de l'aire du quart de cercle, qui est $\frac{\pi}{4}$. Alors $4 \times \frac{A}{N}$ est une approximation de π .

1. Définir une fonction SAGE prenant un entier N en argument, simulant N nombres aléatoires $0 \leq x_i \leq 1$ et N autres nombres aléatoires $0 \leq y_i \leq 1$ tous distribués uniformément sur $[0, 1]$, et retournant un graphique sur lequel sont dessinés
 - le carré de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$,
 - le quart de cercle (dans le quart de plan $x, y \geq 0$) de centre $(0, 0)$ et de rayon 1,
 - les points (x_i, y_i) pour tout $1 \leq i \leq N$.
2. Définir une fonction SAGE prenant un entier N en argument, simulant N nombres aléatoires $0 \leq x_i \leq 1$ et N autres nombres aléatoires $0 \leq y_i \leq 1$ tous distribués uniformément sur $[0, 1]$, et retournant les deux nombres $4 \times \frac{A}{N}$ et $|\pi - 4 \times \frac{A}{N}|$, où A est le nombre de points (x_i, y_i) qui sont dans le quart de cercle.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Définir une fonction SAGE retournant le plus petit entier N tel que $|\pi - 4 \times \frac{A}{N}| \leq \varepsilon$. Discuter N en fonction de ε . **Remarque :** pour plus d'efficacité, il serait bon de rajouter au fur et à mesure de nouveaux points aléatoires, plutôt que de resimuler un nouvel échantillon entier de N nouveaux points lorsque N change.
4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive, donc bornée : on suppose que $0 \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, où $0 < M \in \mathbb{R}$. Proposer une méthode similaire à ci-dessus pour calculer l'aire sous la courbe de f entre a et b , c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$.
5. Implémenter deux fonctions SAGE comme aux questions 1 et 2, permettant d'une part la représentation graphique de la méthode décrite en question 4, et d'autre part retournant l'approximation de l'aire sous la courbe de f entre a et b .

Exercice 2. (*Interpolation et intégration*)

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Peut-on comparer $\int_a^b f(x)dx$ avec les approximations numériques obtenues par les méthodes des rectangles à gauche et à droite ? Si oui, que peut-on dire ?
2. Soit une fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(-x) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq 1$. Peut-on comparer $\int_{-1}^0 f(x)dx$ et $\int_0^1 f(x)dx$?
3. Peut-on comparer la méthode des rectangles à gauche avec m points et le résultat de *IntegraleLagrangeUniformeCompose* avec $n = 0$ et les $z_i = a + i \frac{b-a}{m}$, $0 \leq i \leq m$?
4. A quoi peut-on comparer le résultat de *IntegraleLagrangeUniformeCompose* avec $n = 1$ et les $z_i = a + i \frac{b-a}{m}$, $0 \leq i \leq m$? En déduire des méthodes d'intégration numérique d'ordre supérieur, généralisant les méthodes vues dans le TP d'Intégration Numérique.
5. Que pensez-vous de l'interpolation de Lagrange d'une fonction f lorsque f est elle-même un polynôme de degré $p \geq 1$? On pourra discuter selon le nombre de points utilisés pour l'interpolation, en particulier par rapport à p .
6. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Effectuer le changement de variable $y = 2 \frac{x-a}{b-a} - 1$ dans $\int_a^b f(x)dx$ pour obtenir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(a + (b-a)\frac{y+1}{2}\right) \frac{b-a}{2} dy.$$

Le but de cette transformation est de se ramener à l'intervalle $[-1, 1]$ afin de construire une interpolation de Lagrange utilisant les points de Tchebychev pour approximer f . Définir les fonctions *LagrangeTchebychev2* et *plotLagrangeTchebychev2* similaires aux fonctions *LagrangeUniforme* et

plotLagrangeUniforme de l'exercice 2 du TP d'Interpolation Polynômiale, et prenant en argument cette fois-ci $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

7. Mêmes questions que la question 4 de l'exercice 4 du TP d'Interpolation Polynômiale, en utilisant les polynômes de Lagrange obtenus avec les racines des polynômes de Tchebychev, c'est-à-dire *LagrangeTchebychev2*.