ensIIE 2025-2026
FISA 1A UE Modélisation Mathématique

Travaux pratiques – Intégration Numérique

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En général, sauf dans des cas particuliers, il est impossible de calculer théoriquement la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$. Il existe par contre des méthodes numériques permettant d'obtenir une valeur approchée de cette intégrale inconnue. Le but de ce TP est d'implémenter certaines approximations numériques, et de les comparer avec la valeur théorique lorsque l'on peut la calculer, ou avec la valeur proposée par SAGE par la fonction *numerical_integral(f,a,b)*.

Exercice 1. (*Préliminaires*)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction connue de SAGE et soient $a < b$ deux réels. Comment tracer la courbe $[a, b] \ni x \mapsto f(x)$?
2. Soit f une fonction dont la valeur $f(x)$ est seulement connue pour $x \in (x_i)_{i=1}^n$, $n \geq 1$. Comment tracer le nuage de points $(x_i, f(x_i))_{i=1}^n$?
3. Soit $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ une famille de points. Comment calculer et tracer la régression linéaire de cette famille de points ?
4. Définir une fonction *rect* prenant en argument trois nombres réels a, b et y tels que $a < b$, et traçant le rectangle ayant pour sommets les points $(a, 0), (a, y), (b, y), (b, 0)$.
5. Définir une fonction *Arect* prenant en argument trois nombres réels a, b et y tels que $a < b$, et retournant l'aire du rectangle ayant pour sommets les points $(a, 0), (a, y), (b, y), (b, 0)$.
6. Définir une fonction *trapeze* prenant en argument quatre nombres réels a, b et y, z tels que $a < b$, et traçant le trapèze ayant pour sommets les points $(a, 0), (a, y), (b, z), (b, 0)$.
7. Définir une fonction *Atrapeze* prenant en argument quatre nombres réels a, b et y, z tels que $a < b$, et retournant l'aire du trapèze ayant pour sommets les points $(a, 0), (a, y), (b, z), (b, 0)$.

Exercice 2. (*Méthode des rectangles*) Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $n \geq 1$ un entier et $h_n := \frac{b-a}{n}$. La méthode des rectangles à gauche consiste en l'approximation suivante.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h_n f\left(a + ih_n\right).$$

Cela revient à, pour $n \geq 1$ fixé,

- Découper l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[a + ih_n, a + (i + 1)h_n]$, pour chaque $0 \leq i \leq n - 1$, et utiliser la relation de Chasles $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih_n}^{a+(i+1)h_n} f(x)dx$,
- pour chaque $0 \leq i \leq n - 1$, approcher l'aire sous la courbe de f sur $[a + ih_n, a + (i + 1)h_n]$ par l'aire du rectangle de sommets $(a + ih_n, 0)$, $(a + ih_n, f(a + ih_n))$, $(a + (i + 1)h_n, f(a + ih_n))$, $(a + (i + 1)h_n, 0)$. Cette aire est égale à $h_n f(a + ih_n)$.

La méthode s'appelle *méthode des rectangles à gauche* car l'on utilise la valeur de f au point "initial" de chaque sous-intervalle comme hauteur du rectangle.

1. Définir une fonction *methodeRectangleGaucheGraphique* prenant en argument $a < b$, n et une fonction f, et retournant une représentation graphique de la méthode des rectangles à gauche.

2. Définir une fonction *methodeRectangleGauche* prenant en argument deux réels $a < b$, une fonction f et un entier $n \geq 1$, et retournant l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles à gauche.

3. Définir une fonction *erreurRectangleGauche* prenant en argument $a < b$, f et $n_{\max} \geq 1$, et retournant un nuage de points représentant graphiquement les points, pour $1 \leq n \leq n_{\max}$,

$$P_n = (\log(n), \log(|\mathit{methodeRectangleGauche}(a, b, f, n) - \mathit{numerical\_integral}(f, a, b)|)),$$

c'est-à-dire que l'abscisse du point P_n est $\log(n)$, et son ordonnée est

$$\log(|\mathit{methodeRectangleGauche}(a, b, f, n) - \mathit{numerical\_integral}(f, a, b)|).$$

Qu'observez-vous, en prenant $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et $n_{\max} = 100$?

4. Par une régression linéaire, tracer une droite passant au plus près des points P_n, $1 \leq n \leq n_{\max}$. Quelle est sa pente ?

5. Définir la méthode des rectangles à droite et la méthode des rectangles du point milieu, et répondre aux mêmes questions.

Exercice 3. (*Méthode des trapèzes)* Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $n \geq 1$ un entier et $h_n := \frac{b-a}{n}$. La méthode des trapèzes consiste en l'approximation suivante

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} h_n \frac{f(a + ih_n) + f(a + (i + 1)h_n)}{2}.$$

Cela revient à, pour $n \geq 1$ fixé,

- Découper l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[a + ih_n, a + (i + 1)h_n]$, pour chaque $0 \leq i \leq n - 1$, et utiliser la relation de Chasles $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih_n}^{a+(i+1)h_n} f(x)dx$
- pour chaque $0 \leq i \leq n - 1$, approcher l'aire sous la courbe de f sur $[a + ih_n, a + (i + 1)h_n]$ par l'aire du trapèze de sommets $(a + ih_n, 0)$, $(a + ih_n, f(a + ih_n))$, $(a + (i + 1)h_n, f(a + (i + 1)h_n))$, $(a + (i + 1)h_n, 0)$. Cette aire est égale à $h_n \frac{f(a+ih_n)+f(a+(i+1)h_n)}{2}$.

Implémenter les fonctions analogues à celles introduites pour les méthodes des rectangles.

Exercice 4. (*Méthode de Romberg*) Pour $n \geq 1$ fixé, notons $T(n)$ l'aire obtenue par la méthode des trapèzes avec $n + 1$ points:

$$T(n) := \sum_{i=0}^{n-1} h_n \frac{f(a + ih_n) + f(a + (i + 1)h_n)}{2}.$$

La méthode de Romberg permet d'obtenir des estimations plus précises que $T(n)$ de l'intégrale inconnue. On définit $R(n, m)$ pour tous entiers $0 \leq m \leq n$ par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} R(n, 0) &= T(2^n), \\ R(n, m) &= \frac{1}{4^m - 1} (4^m R(n, m - 1) - R(n - 1, m - 1)). \end{aligned}$$

L'approximation de Romberg au niveau n est $R(n, n)$.

1. Définir une fonction **récursive** *Romberg* prenant en argument $a < b$, $0 \leq m \leq n$ et une fonction f, et retournant $R(n, m)$. En déduire une fonction *RombergDiag* prenant en argument $a < b$, $n \geq 0$ et une fonction f, et retournant $R(n, n)$.

2. Définir une fonction *TableauRomberg* prenant en argument $a < b$, $n_{\max} \geq 0$ et une fonction f, et retournant un tableau contenant $R(n, m)$ pour $0 \leq m \leq n \leq n_{\max}$.

3. Définir une fonction *ApproximationIntegrale* prenant en argument $a < b$, une fonction f et une tolérance $\varepsilon > 0$, et retournant une approximation $\tilde{I}$ de $I = \int_a^b f(x)dx$ telle que $|I - \tilde{I}| \leq \varepsilon$. On utilisera pour cela la méthode de Romberg, en s'arrétant lorsque $|R(n,n) - R(n-1,n-1)| \leq \varepsilon$.

4. Comparer les valeurs obtenues par *ApproximationIntegrale(a,b,f)* et par *numerical_integral(f,a,b)* de SAGE, pour $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$, $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1,1]$ et pour les fonctions de votre choix.

5. Définir une fonction *NombreLignesRomberg* prenant en argument $a < b$, une fonction b et un entier $n \geq 1$, et retournant le nombre de lignes dans le tableau de Romberg nécessaires pour atteindre une précision de 2^{-n}.

6. Tracer le nuage de points $(n, NombreLignesRomberg(a,b,f,n))$ pour $1 \leq n \leq n_{\max}$. Interpréter le graphe obtenu.

Exercice 5.

1. Calculer la valeur théorique de l'intégrale $I(1) = \int_0^\infty xe^{-x}dx$.

2. Soit $I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ pour tout $n \geq 0$. Donner une formule de récurrence liant $I(n)$ à $I(n-1)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire une formule explicite pour $I(n)$.

3. Implémenter une fonction *I* prenant en argument $n \geq 0$ (entier), $L > 0$ (réel) et $m \geq 1$ (entier), et retournant une approximation numérique de $\int_0^L x^n e^{-x}dx$ utilisant la méthode des rectangles à gauche avec m rectangles. Discuter le choix du nombre de rectangles m par rapport à L, et observer la convergence lorsque $L \to \infty$ de $I(n,L)$ vers la valeur limite théorique $I(n)$.