Dualité en Programmation Linéaire
Algorithmes primal et dual du simplexe

Alain Faye

Option 3A

Optimisation 1

Plan

- Dualité lagrangienne (rappels)
- Programmation linéaire et dualité
  - Définition du dual d’un programme linéaire
  - Théorème de dualité forte
- Algorithmes primal et dual du simplexe
- Annexes
  - Interprétation des variables duales
  - Théorème des écarts complémentaires

Dualité lagrangienne

Dualité lagrangienne

Problème Primal $\min_{x \in X} f(x)$ s.c. $\begin{cases} g_i(x) \leq 0, \ \ i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, \ \ j = 1, \dots, p \end{cases}$

avec $X \subseteq R^n$

Fonction de Lagrange $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$

$avec\ \lambda_i \geq 0 \ \ i = 1, \dots, m$

Fonction duale $\theta(\lambda, \mu) = \min_{x \in X} L(x, \lambda, \mu)$

Problème Dual $\max_{\lambda \geq 0,\, \mu} \theta(\lambda, \mu)$

Dualité lagrangienne

Théorème de dualité

$f(x) \geq \theta(\lambda, \mu)$
$\forall x \in X$ satisfaisant les contraintes du primal
$\forall \lambda \geq 0, \ \forall \mu$

Corollaire

Soit $x^* \in X$ satisfaisant les contraintes du primal
et $\lambda^* \geq 0, \mu^*$
tels que:

$$f(x^*) = \theta(\lambda^*, \mu^*)$$

Alors x^* est solution du primal et (λ^*, μ^*) est solution du dual

Programmation Linéaire et dualité

Pb du pharmacien : fournir une potion contenant un minimum d'unités en vitamines A, B, C
en utilisant les poudres fournies par 2 laboratoires

100g de poudre	laboratoire 1	laboratoire 2
vitamine A	20 unités	5 unités
vitamine B	30 unités	20 unités
vitamine C	5 unités	10 unités
coût	6	9

Il lui faut au moins
25 unités de vitamine A
60 unités de vitamine B
15 unités de vitamine C

Pb du pharmacien : fournir une potion contenant un minimum d'unités en vitamines A, B, C
en utilisant les poudres fournies par 2 laboratoires

100g de poudre	laboratoire 1	laboratoire 2
vitamine A	20 unités	5 unités
vitamine B	30 unités	20 unités
vitamine C	5 unités	10 unités
coût	6	9

Il lui faut au moins
25 unités de vitamine A
60 unités de vitamine B
15 unités de vitamine C

$$\min 6x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.c.}\begin{cases} 20x_1 + 5x_2 \geq 25 \\ 30x_1 + 20x_2 \geq 60 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 15 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Majorants et minorants

Quelques solutions

$x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $z = 18$

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 21$

Ce sont des solutions sous-optimales donc **majorants** de la valeur optimale z^*

$z^* \leq 18$

Comment obtenir des **minorants** ?

$? \leq z^*$

- $3/10 \times$ la contrainte vit.A $\Rightarrow 7{,}5 \leq 6\ x_1 + 3/2\ x_2 \leq 6\ x_1 + 9\ x_2 = z$

  Donc $7{,}5 \leq z^*$

- $3/20 \times$ vit.A + $1/10 \times$ vit.B $\Rightarrow 75/20 + 6 \leq 6\ x_1 + (15/20 + 2)\ x_2 \leq 6\ x_1 + 9\ x_2 = z$

  Donc $3{,}75 + 6 = 9{,}75 \leq z^*$

- $2/10 \times$ la contrainte vit.B $\Rightarrow 12 \leq 6\ x_1 + 4\ x_2 \leq 6\ x_1 + 9\ x_2 = z$

  Donc $12 \leq z^*$

On sait dèjà que $12 \leq z^* \leq 18$

Peut-on faire mieux ?

Généralisons cette approche

Introduisons les variables
$y_A \geq 0$, $y_B \geq 0$, $y_C \geq 0$

$25 \leq 20\, x_1 + 5\, x_2$ $\times\, y_A$
$60 \leq 30\, x_1 + 20\, x_2$ $\times\, y_B$
$15 \leq 5\, x_1 + 10\, x_2$ $\times\, y_C$

$25\, y_A + 60\, y_B + 15\, y_C \leq x_1 (20\, y_A + 30\, y_B + 5\, y_C) + x_2 (5\, y_A + 20\, y_B + 10\, y_C)$

On impose
$20\, y_A + 30\, y_B + 5\, y_C \leq 6$ (1)
$5\, y_A + 20\, y_B + 10\, y_C \leq 9$ (2)

On a alors
$25\, y_A + 60\, y_B + 15\, y_C \leq 6\, x_1 + 9\, x_2 = z$

Comme on veut le minorant le plus haut possible, il ne reste plus qu'à
maximiser $25\, y_A + 60\, y_B + 15\, y_C$
sous contraintes (1) , (2)
et avec $y_A \geq 0$, $y_B \geq 0$, $y_C \geq 0$

Résumons

Problème primal (P)

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & (i = 1 \text{ à } m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1 \text{ à } n) \end{cases}$$

Problème dual (D)

$$\max w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j & (j = 1 \text{ à } n) \\ y_i \geq 0 & (i = 1 \text{ à } m) \end{cases}$$

Exemple:

$$\min 6x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\ 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\ 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

$$\max 25y_\mathrm{A} + 60y_\mathrm{B} + 15y_\mathrm{C}$$

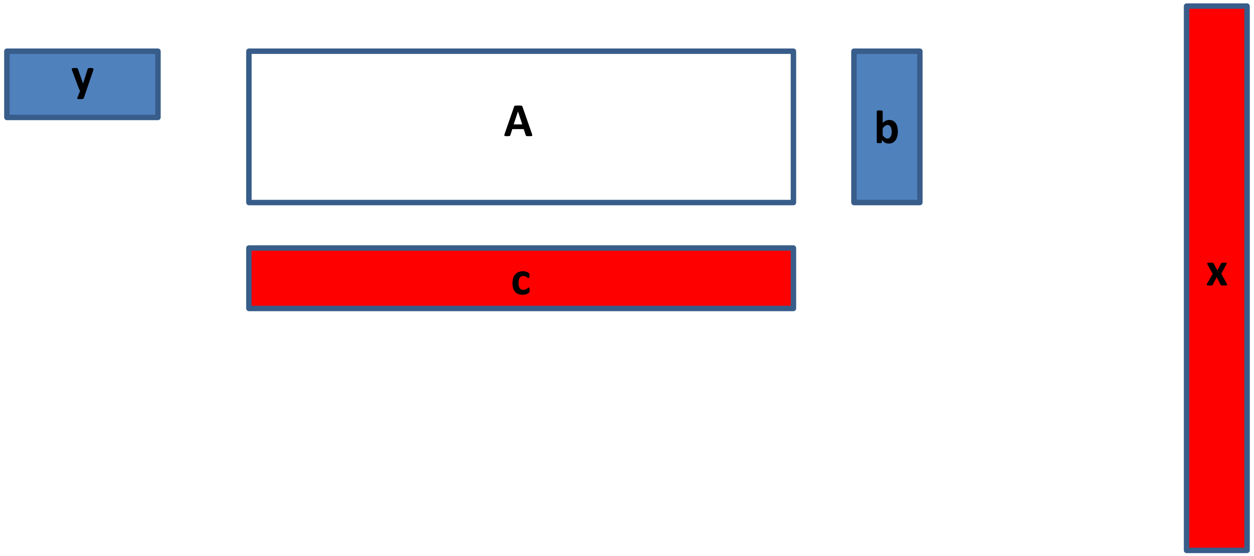
$$\text{s.c.} \begin{cases} 20y_\mathrm{A} & +30y_\mathrm{B} & +5y_\mathrm{C} & \leq 6 \\ 5y_\mathrm{A} & +20y_\mathrm{B} & +10y_\mathrm{C} & \leq 9 \\ y_\mathrm{A} \geq 0 & y_\mathrm{B} \geq 0 & y_\mathrm{C} \geq 0 & \end{cases}$$

Dualité et programmation linéaire

Primal (P) $\min_{x \geq 0} cx$ s.c. $Ax \geq b$

Dual (D) $\max_{y \geq 0} yb$ s.c. $yA \leq c$

Format des données et des variables



Construction du dual

$$(\mathrm{P})\ \left[\begin{array}{l}\min \mathrm{c}x \\ \text{s.c.}\begin{cases}\mathrm{A}x \ge \mathrm{b} \\ x \ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{D})\ \left[\begin{array}{l}\max y\mathrm{b} \\ \text{s.c.}\begin{cases}y\mathrm{A} \le \mathrm{c} \\ y \ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\mathrm{c} = \begin{pmatrix}6 & 9\end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix}20 & 5 \\ 30 & 20 \\ 5 & 10\end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix}y_{\mathrm{A}} & y_{\mathrm{B}} & y_{\mathrm{C}}\end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix}25 \\ 60 \\ 15\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\min 6x_1 + 9x_2 \\ \text{s.c.}\begin{cases}20x_1 + 5x_2 \ge 25 \\ 30x_1 + 20x_2 \ge 60 \\ 5x_1 + 10x_2 \ge 15 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0\end{cases}\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\max 25y_{\mathrm{A}} + 60y_{\mathrm{B}} + 15y_{\mathrm{C}} \\ \text{s.c.}\begin{cases}20y_{\mathrm{A}} + 30y_{\mathrm{B}} + 5y_{\mathrm{C}} \le 6 \\ 5y_{\mathrm{A}} + 20y_{\mathrm{B}} + 10y_{\mathrm{C}} \le 9 \\ y_{\mathrm{A}} \ge 0 \quad y_{\mathrm{B}} \ge 0 \quad y_{\mathrm{C}} \ge 0\end{cases}\end{array}$$

Définition du dual dans le cas général

On rajoute des contraintes d'égalités et des variables sans signe ($\gtrless 0$)

Tableau de correspondance primal – dual

minimisation	maximisation
Fonction objectif min	Fonction objectif max
Second membre	Fonction objectif
A matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte i type ≥	Variable $y_i \geq 0$
Contrainte i type =	Variable y_i sans signe
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte j type ≤
Variable x_j sans signe	Contrainte j type =

On lit de gauche à droite quand le primal est en minimisation
De droite à gauche quand le primal est en maximisation

Remarque

Le dual de (D) est (P)

Pour le voir:

1- Ecrire (D) sous forme d'un problème de minimisation avec contraintes ≥
   On note (D') le problème obtenu,

2- Ecrire le dual de (D') en utilisant la transformation matricielle précédente
   Vérifier que le dual de (D') est (P)

Il en résulte que l'on peut lire la transformation pour passer du primal au dual de <u>gauche à droite</u> mais aussi de <u>droite à gauche</u>

Exemple : écrire le dual de ce PL

$$\left[\begin{array}{l} \max v = 25y_A + 60y_B + 15y_C \\ \text{s.c.} \begin{cases} 20y_A & +30y_B & +5y_C & \leq 6 \\ 5y_A & +20y_B & +10y_C & \leq 9 \\ y_A \geq 0 & y_B \geq 0 & y_C \geq 0 & \end{cases} \end{array}\right.$$

Dualité et programmation linéaire

Théorème de dualité faible
Pour toute solution x admissible de (P) et toute solution y admissible de (D)
l'objectif de (P) est supérieur ou égal à l'objectif de (D) : $z \geq w$

démonstration

$$z = cx \underbrace{\geq}_{c \geq yA} (yA)x = y(Ax) \underbrace{\geq}_{Ax \geq b} yb = w$$

Dualité et programmation linéaire

Théorème de dualité faible

Pour toute solution x admissible de (P) et toute solution y admissible de (D)
l'objectif de (P) est supérieur ou égal à l'objectif de (D) : $z \geq w$

démonstration

$$z = \underbrace{cx \geq (yA)x}_{c \geq yA} = \underbrace{y(Ax) \geq yb}_{Ax \geq b} = w$$

Corollaire

Soit x* solution admissible de (P) et z* = cx* la valeur de l'objectif de (P)
Soit y* solution admissible de (D) et w* = y*b la valeur de l'objectif de (D)
telles que z* = w*
Alors x* et z* sont solutions optimales de (P) et (D) respectivement.

Exercice

Exercice

1- Ecrire le dual lagrangien de (P) avec $y=\lambda\geq 0$ comme variables duales

2- Donner les conditions sur y telles que ce dual lagrangien ait une valeur$>-\propto$

3- En déduire que le dual lagrangien de (P) est le problème (D)

Saut de dualité

Le résultat suivant est très important ;

- Si l'un des 2 problèmes a un optimum fini,

alors les valeurs optimales des 2 problèmes (P) et (D) coïncident.

- Si l'un des 2 problèmes a un optimum non fini,

alors l'autre problème n'a pas de solution réalisable

pas de saut entre les valeurs optimales des problèmes (P) et (D)

Absence de saut de dualité
Théorème de dualité forte

Conditions de Karush-Kuhn-Tucker

Soit le programme mathématique suivant

$$\min f(x)$$
$$\text{s.c.} \quad g_i(x) \leq 0 \quad i \in I$$

Avec I un ensemble fini d'indices
f, g_i $i \in I$, fonctions de classe C^1

<u>Conditions nécessaires d'optimalité (Karush-Khun-Tucker)</u>
Si x* « qualifié » est un minimiseur local alors il existe $\lambda_i \geq 0$ $i \in I$ tels que

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 & (c1) \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad i \in I & (c2) \end{cases}$$

(c1) est la généralisation de ∇f(x)=0 (∇f désigne le gradient de f)
(c2) sont les conditions de complémentarité : une contrainte non saturée $g_i(x)<0 \Rightarrow \lambda_i=0$
λ_i $i \in I$ sont appelés « multiplicateurs de Lagrange »

Conditions de Karush-Kuhn-Tucker
Qualification de Arrow-Hurwicz-Uzawa

Théorème Arrow-Hurwicz-Uzawa
Soit x réalisable (satisfaisant les contraintes) et I(x) les indices des contraintes $g_i(x) \leq 0$ saturées par x (i.e. $g_i(x)=0$).
Si les g_i $i \in I(x)$ sont concaves alors x est qualifié.

Dans ce cas, les conditions KKT sont des <u>conditions nécessaires</u> d'optimalité.

Dans le cas de la PL, les fonctions définissant les contraintes sont affines donc concaves.
Donc tout x réalisable est qualifié et
les conditions KKT sont des conditions nécessaires d'optimalité

Conditions KKT Exemple

Soit une bille de masse m sur des plans d'équation $a_i x \geq b_i$ avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

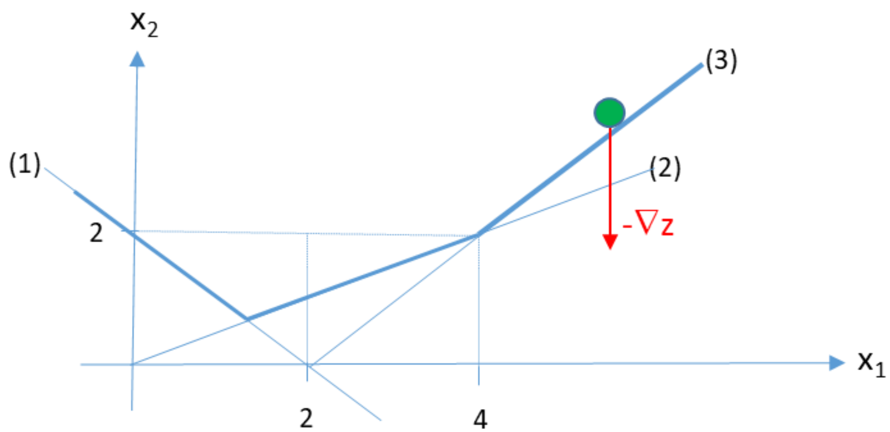
La bille cherche à minimiser son énergie potentielle

L'énergie potentielle z dépend de la hauteur x_2 de la bille : $z=mgx_2$

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Considérons 3 plans : $x_1+x_2 \geq 2$ (1), $-x_1+2x_2 \geq 0$ (2) , $-x_1+x_2 \geq -2$ (3)

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Conditions KKT Exemple

1. Dessiner les vecteurs a_i i=1,2,3 et vérifier qu'ils sont orthogonaux aux plans (i) respectivement.
2. Mettre la bille au point $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. La bille est supportée par le plan (3).

   Ecrire les conditions KKT. Sont-elles satisfaites ?
3. Mettre la bille au point $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quels sont les 2 plans qui supportent la bille ?

   Ecrire les conditions KKT. Sont-elles satisfaites ?
4. Mettre la bille au point $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Quels sont les 2 plans qui supportent la bille ?

   Ecrire les conditions KKT. Sont-elles satisfaites ?
   Vérifier que le poids mg de la bille est « compensé » par les vecteurs a_i des plans supportant la bille.

Théorème de dualité

Théorème de dualité forte

Si le primal admet une solution optimale alors le dual admet une solution optimale ,
et les valeurs optimales des 2 problèmes coïncident.

Théorème de dualité

Théorème de dualité forte

Si le primal admet une solution optimale alors le dual admet une solution optimale ,

et les valeurs optimales des 2 problèmes coïncident.

<u>Démonstration</u>

On peut faire une preuve à partir des conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Khun-Tucker

Soit x^* la solution optimale de (P)

Il existe $\mu \geq 0$ associé aux contraintes $b-Ax \leq 0$, $\lambda \geq 0$ associé aux contraintes $-x \leq 0$

tels que $c-\mu A-\lambda=0$ et $\mu(Ax^*-b)=0$ et $\lambda x^*=0$

Théorème de dualité

Théorème de dualité forte

Si le primal admet une solution optimale alors le dual admet une solution optimale ,

et les valeurs optimales des 2 problèmes coïncident.

<u>Démonstration</u>

On peut faire une preuve à partir des conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Khun-Tucker

Soit x^* la solution optimale de (P)

Il existe $\mu \geq 0$ associé aux contraintes $b-Ax \leq 0$, $\lambda \geq 0$ associé aux contraintes $-x \leq 0$

tels que $c-\mu A-\lambda=0$ et $\mu(Ax^*-b)=0$ et $\lambda x^*=0$

-point 1. $\lambda \geq 0 \Rightarrow c-\mu A \geq 0 \Rightarrow c \geq \mu A$ donc μ satisfait les contraintes de (D)

-point 2. On multiplie $c-\mu A-\lambda=0$ par $x^* \Rightarrow cx^*-\mu Ax^*-\lambda x^*=0 \Rightarrow cx^*= \mu Ax^* = \mu b$

Les valeurs des objectifs de (P) et (D) coïncident .

Donc μ est solution optimale de (D) (cf corollaire du th. Dualité faible)

Que se passe-t-il si l'un des 2 problèmes (primal ou dual) est non borné ?

Il résulte de l'inégalité z≥v (th. dualité faible) que
- si min z est non borné (-∞) alors max v= -∞ c'est –à dire le dual n'a pas de solution
- et réciproquement si max v= +∞ alors le primal n'a pas de solution

<u>Exemple</u>: soit le problème (P)

$$\max v = y_1 + 2y_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} -2y_1 + y_2 \leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ y_1 - 4y_2 \leq 4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ecrire le dual de ce problème. A-t-il une solution réalisable ?
Confirmer votre réponse en résolvant (P) par l'algorithme du simplexe.

Il résulte de l'inégalité z≥w (Th. dualité faible)

- Si (P) a un optimum non borné (-∞) alors le max de w vaut - ∞ c'est-à-dire (D) pas de solution réalisable

Exemple: (P) $\min z = -x_1 + x_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Si (D) a un optimum non borné (+∞) alors le min de z vaut + ∞ c'est-à-dire (P) pas de solution réalisable

Exemple: (D) $\max w = y_1 + y_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

(P) et (D) peuvent ne pas avoir de solution réalisable simultanément

Exemple : (P) $\min z = x_1 - x_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -2x_1 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Algorithmes primal et dual du simplexe

Algorithmes primal et dual du simplexe

Problème (P) sous **forme standard** (contraintes =) $\min_{x \geq 0} cx$ s.c. $Ax = b$

Problème (D) dual de (P) $\max_{y} yb$ s.c. $yA \leq c$

<u>Attention pas de condition de signe sur y</u>

Algorithmes primal et dual du simplexe

Base

Quitte à déplacer les colonnes de A,
on partitionne A en une matrice carrée B inversible et une matrice N

$$\mathrm{A} = (B \quad N)$$

On partitionne de façon identique le vecteur x et le vecteur c

$$cx = (c_B \quad c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

c_B est le vecteur extrait de c , correspondant aux colonnes de la matrice B
c_N est le vecteur extrait de c , correspondant aux colonnes de la matrice B
Même chose pour le vecteur x

Algorithmes primal et dual du simplexe

Solution de base de (P)

$$Ax = b \leftrightarrow (B \quad N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$$

La solution de base (associée à B) est la solution du système particulière suivante:

$$x_N = 0,\ x_B = B^{-1}b$$

Le coût de cette solution est $cx = c_B B^{-1} b$

On pose $y = c_B B^{-1}$

On constate alors que: $cx = yb$ Égalité entre l'objectif de (P) et (D)

Maintenant si x satisfait les contraintes de (P) et y les contraintes de (D)
Alors x et y sont solutions (optimales) de (P) et (D) respectivement.
Voir le théorème de dualité et son corollaire

Algorithmes primal et dual du simplexe

Coûts réduits

$$\begin{cases} cx = c_B x_B + c_N x_N \\ \\ Ax = b\,, \qquad B x_B + N x_N = b\,, \quad x_B \quad + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N$$

L'objectif de (P) est exprimé en fonction de x_N (variables hors-base) uniquement

Les coefficients de x_N sont les <u>coûts réduits</u> : $c_N - c_B B^{-1} N$

Exemple

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Prenons var. de base = x_3, x_4, x_2
Donc hors-base = x_1, x_5

Exemple (suite)

variables en base x_3 , x_4 , x_2
variables hors-base x_1 , x_5
exprimons les variables de base en fonction des hors-base

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne le système: $\begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 \quad -x_5 = 2 \\ x_1 \quad + x_4 \quad = 2 \\ -x_1 \quad x_2 \quad + x_5 = 1 \end{cases}$

Exemple (suite)

Calculons les coûts réduits des variables hors-base x_1, x_5

c_B=(0 0 -2)

- Coût réduit de $x_1 = c_1 - c_B B^{-1} A_1$ (A_1=colonne 1 de A)

  $$-1-(0\ 0\ -2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=-1-2=-3$$

- Coût réduit de $x_5 = c_5 - c_B B^{-1} A_5$ (A_5=colonne 5 de A)

  $$0-(0\ 0\ -2)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0+2=2$$

- $c_B B^{-1} b=(0\ 0\ -2)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=-2$

D'où $z = -2 - 3x_1 + 2x_5$

$z = -2$ sur la solution de base $x_3=2$, $x_4=2$, $x_2=1$, $x_1=0$, $x_5=0$ (var. hors-base nulles)

Algorithmes primal et dual du simplexe

Solution duale réalisable

$$\begin{cases} yA \leq c \\ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yB \leq c_B \\ yN \leq c_N \end{cases}$$

En prenant $y = c_B B^{-1}$, on obtient: $\begin{cases} c_B B^{-1} B \leq c_B \\ c_B B^{-1} N \leq c_N \end{cases}$

La première condition est toujours trivialement vérifiée.
La seconde est vérifiée si et seulement si $c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$

La solution y est duale réalisable si et seulement si les coûts réduits sont positifs ou nuls

Exemple (suite)

- Calculer $y=c_B B^{-1}$

  $c_B=(0\ 0\ -2)$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Cet y satisfait-il les contraintes du dual ? Pouvait-on prévoir la réponse ?

Algorithmes primal et dual du simplexe

Résumé

1- La matrice B induit une solution dite de base : $x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0$

La solution de base est primale réalisable $(x \geq 0)$ si et seulement si $B^{-1}b \geq 0$

2- La matrice B induit une solution $y = c_B B^{-1}$ duale réalisable
si et seulement si $c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$ (coûts réduits ≥ 0)

3- Pour cette solution de base et cette solution y,
les objectifs du primal et du dual ont la même valeur = $c_B B^{-1} b$

Algorithmes primal et dual du simplexe

Algorithme primal
On passe de solution de base primale réalisable en solution de base primale réalisable
Et on stoppe dès que l'on a atteint une base B qui est duale réalisable (coûts réduits $\geq$ 0)

Algorithme dual
On passe de base duale réalisable en base duale réalisable
Et on stoppe dès que l'on a atteint une solution de base primale réalisable $(B^{-1}b \geq 0)$

Algorithmes primal et dual du simplexe

B’ et B **adjacentes** = ne diffèrent que d’une colonne

L’algorithme primal du simplexe

- Phase 1 : on trouve une solution primal réalisable B
- Phase 2 :
  1. si B est aussi dual réalisable alors stop. retourner B
  2. sinon soit on a une preuve d’infinitude,
     soit on change de base : on trouve B’ adjacente à B, primal réalisable et meilleure que B
  3. remplacer B par B’ et retour en 1.

L’algorithme dual du simplexe

- Phase 1 : on trouve une solution dual réalisable B
- Phase 2 :
  1. si B est aussi primal réalisable alors stop. retourner B
  2. sinon soit on a une preuve de non-réasibilité du primal (infinitude du dual),
     soit on change de base : on trouve B’ adjacente à B, dual réalisable et meilleure que B
  3. remplacer B par B’ et retour en 1.

Algorithmes primal et dual du simplexe

Ecriture canonique de (P) relativement à une matrice de base B

$$\begin{cases} \min \quad z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \\ x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0 \end{cases}$$

que l'on peut noter:

$$\begin{cases} \min \quad z = c_B B^{-1} b + \sum_{j\ hors-base} \Delta_j x_j \\ x_i + \sum_{j\ hors-base} \overline{a_{ij}}\, x_j = \overline{b_i} \qquad \forall i\ en\ base \\ x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0 \end{cases}$$

Algorithmes primal et dual du simplexe

Règles de pivotage (pour passer d'une base B à une base B' adjacente)

Algorithme primal
Variable entrant dans la base
- Variable entrant dans la base : $x_e \ tel\ que\ \Delta_e < 0$ et le plus petit

Variable sortant de la base
- Si tous les $\overline{a_{ie}} \leq 0$ (dans la colonne e) alors minimum non borné (-∞)

(on peut augmenter indéfiniment la variable x_e)
Sinon variable x_s sortant de la base où $s = \underset{i}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{ie}}} : \forall i \ \ t.q.\ \overline{a_{ie}} > 0 \right\}$
(cette règle permet de maintenir le second membre $\overline{b} \geq 0$)

Algorithmes primal et dual du simplexe

Règles de pivotage (pour passer d'une base B à une base B' adjacente)

Algorithme dual

Variable sortant de la base

- Variable sortant de la base : $x_s \; tel \; que \; \bar{b}_s < 0$ et le plus petit

Variable entrant dans la base

- Si tous les $\overline{a_{sj}} \geq 0$ (dans la ligne s) alors primal non réalisable

(en ligne s, on a une équation avec membre gauche≥0 et membre droit <0)

Sinon variable x_e entrant dans la base où $e = \underset{j}{\operatorname{argmax}} \left\{ \frac{\Delta_j}{\overline{a_{sj}}} : \forall j \; t.q. \overline{a_{sj}} < 0 \right\}$

(cette règle permet de maintenir les coûts réduits ≥ 0)

Exercice

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.c}\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 47 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1-Mettre ce problème sous forme standard
2-Trouver une base duale réalisable évidente
3-Partant de cette base, résoudre le problème par l'algorithme dual du simplexe

Annexes

- Dualité – Interprétation économique
- Ecarts complémentaires

Pb du pharmacien :

100g de poudre	laboratoire 1	laboratoire 2
vitamine A	20 unités	5 unités
vitamine B	30 unités	20 unités
vitamine C	5 unités	10 unités
coût	6	9

Il lui faut au moins
25 unités de vitamine A
60 unités de vitamine B
15 unités de vitamine C

Un 3ème laboratoire décide de commercialiser les vitamines A, B, C séparément.

Il lui faut trouver le prix y_A, y_B, y_C pour chaque unité de vitamine.

Pour être concurrentiel avec le laboratoire 1 il faut : $20y_A+30y_B+5y_C \leq 6$

Si le pharmacien achète la préparation du 3è laboratoire, il ne paiera pas plus cher que pour la potion du laboratoire 1

Pb du pharmacien :

100g de poudre	laboratoire 1	laboratoire 2
vitamine A	20 unités	5 unités
vitamine B	30 unités	20 unités
vitamine C	5 unités	10 unités
coût	6	9

Il lui faut au moins
25 unités de vitamine A
60 unités de vitamine B
15 unités de vitamine C

Un 3ème laboratoire décide de commercialiser les vitamines A, B, C <u>séparément</u>.

Il lui faut trouver le prix y_A, y_B, y_C pour chaque unité de vitamine.

Pour être concurrentiel avec le laboratoire 1 il faut : $20y_A+30y_B+5y_C \leq 6$

Si le pharmacien achète la préparation du 3è laboratoire, il ne paiera pas plus cher que pour la potion du laboratoire 1

Pour être concurrentiel avec le laboratoire 2 il faut : $5y_A+20y_B+10y_C \leq 9$.

Pb du pharmacien :

100g de poudre	laboratoire 1	laboratoire 2
vitamine A	20 unités	5 unités
vitamine B	30 unités	20 unités
vitamine C	5 unités	10 unités
coût	6	9

Il lui faut au moins
25 unités de vitamine A
60 unités de vitamine B
15 unités de vitamine C

Un 3$^{\text{ème}}$ laboratoire décide de commercialiser les vitamines A, B, C séparément.

Il lui faut trouver le prix y_A, y_B, y_C pour chaque unité de vitamine.

Pour être concurrentiel avec le laboratoire 1 il faut : $20y_A+30y_B+5y_C \leq 6$

Si le pharmacien achète la préparation du 3$^{\text{è}}$ laboratoire, il ne paiera pas plus cher que pour la potion du laboratoire 1

Pour être concurrentiel avec le laboratoire 2 il faut : $5y_A+20y_B+10y_C \leq 9$.

Le laboratoire désire maximiser les gains en vendant ses vitamines au pharmacien

maximiser $25\, y_A + 60\, y_B + 15\, y_C$

Pb du pharmacien : se fournissant auprès des laboratoires 1 et 2
préparer sa potion à un moindre coût

pb primal

$$\min 6x_1 + 9x_2$$
$$\text{s.c.}\begin{cases} 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\ 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\ 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Pb du concurrent des laboratoires 1 et 2 : trouver le juste prix des vitamines

pb dual

$$\max 25y_{\mathrm{A}} + 60y_{\mathrm{B}} + 15y_{\mathrm{C}}$$
$$\text{s.c.}\begin{cases} 20y_{\mathrm{A}} & +30y_{\mathrm{B}} & +5y_{\mathrm{C}} & \leq 6 \\ 5y_{\mathrm{A}} & +20y_{\mathrm{B}} & +10y_{\mathrm{C}} & \leq 9 \\ y_{\mathrm{A}} \geq 0 & y_{\mathrm{B}} \geq 0 & y_{\mathrm{C}} \geq 0 & \end{cases}$$

Ecarts complémentaires

Propriété.

Soit x une solution réalisable de (P) c'est-à-dire x vérifie les contraintes de (P) et y une solution réalisable de (D) c'est-à-dire y vérifie les contraintes de (D).

x et y sont solutions optimales de (P) et (D) respectivement

si et seulement si $y(Ax\text{-}b)=0$ et $(c\text{-}yA)x=0$.

Vérifions la propriété sur le pb du pharmacien:

$$\left.\begin{array}{l} y_A\times(20x_1+5x_2-25)\ + \\ y_B\times(30x_1+20x_2-60)\ + \\ y_C\times(5x_1+10x_2-15)\ + \\ x_1\times(6-20y_A-30y_B-5y_C)\ + \\ x_2\times(9-5y_A-20y_B-10y_C)\ =0 \end{array}\right\} \text{ termes}\geq 0 \Rightarrow \textbf{si la somme=0} \text{ ils sont tous nuls}$$

$\Leftrightarrow 6x_1+9x_2 -25y_A-60y_B-15y_C= 0 \Leftrightarrow$ l'objectif (P)=l'objectif de (D) $\Leftrightarrow$ x et y solutions de (P) et (D)

il résulte du théorème des écarts complémentaires que
une contrainte lâche (non saturée) correspond à une variable duale nulle
et ceci pour les 2 problèmes primal et dual

Exemple du problème pharmacien

Une solution de (P) $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$
Une solution de (D) $y_A = 1/5$, $y_B = 1/30$, $y_C = 1/5$
La contrainte (vit.A) de (P) est non saturée ($33,75 > 25$) donc y_A devrait être nulle
La contrainte (2) de (D) est non saturée ($3+2/3 < 9$) donc x_2 devrait être nulle.
Ces solutions ne satisfont pas les écarts complémentaires donc non optimales

Une solution de (P) $x_1 = 3/2$, $x_2 = 3/4$
Une solution de (D) $y_A = 0$, $y_B = 3/40$, $y_C = ¾$
Elles vérifient les écarts complémentaires donc optimales pour (P) et (D) respectivement

Ecarts complémentaires

Exercice
Soit $x \geq 0$ satisfaisant les contraintes de (P)
et $y \geq 0$ satisfaisant les contraintes de (D)

Montrer que :

$cx = yb$ si et seulement si
$y(b - Ax) = 0$ et $(c - yA)x = 0$

Interprétation des variables duales

Soit (P) pb de type minimiser et son dual (D).

A l 'optimum de (P) et (D) on a $z^*=v^*=y$b

De combien varie l 'optimum de (P)
lorsque b le second membre des contraintes varie ?

$\Delta z^*=y\Delta$b si Δb pas trop grand
sinon $\Delta z^* \geq y\Delta$b les valeurs des var. duales y n 'étant plus optimales

Faisons varier un b_i uniquement $\Delta z^*=y_i\Delta b_i \Rightarrow \Delta z^*/\Delta b_i=y_i$

y_i représente le prix à payer quand on fait varier la contrainte i

Exemple : si le pharmacien fait varier ses demandes en vitamines A, B, C

Solution du dual:
$y_A = 0$, $y_B = {}^{3}/_{40}$, $y_C = {}^{3}/_{4}$, $v = {}^{63}/_{4}$

$$(\mathrm{P}) \left[\begin{array}{l} \min z = 6x_1 + 9x_2 \\ \text{s.c.} \begin{cases} 20x_1 & +5x_2 & \geq 25 \\ 30x_1 & +20x_2 & \geq 60 \\ 5x_1 & +10x_2 & \geq 15 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$25+\varepsilon \Rightarrow \Delta z = y_A \times \varepsilon = 0 \times \varepsilon$

$60+\varepsilon \Rightarrow \Delta z = y_B \times \varepsilon = {}^{3}/_{40} \times \varepsilon$

$15+\varepsilon \Rightarrow \Delta z = y_C \times \varepsilon = {}^{3}/_{4} \times \varepsilon$

La vitamine A pas d’effet sur le coût, B un peu d’effet, C 10 fois plus d’effet